

Université de Montréal

Analyse et calibration d'un modèle multiéchelle  
pour la simulation de feux de forêt

par

Éric Brunelle

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)  
en Mathématiques appliquées

février 2007



QA

3

054

2007

V-008

## AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

## NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Analyse et calibration d'un modèle multiéchelle  
pour la simulation de feux de forêt**

présenté par

**Éric Brunelle**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Monsieur Yvan Saint-Aubin*

---

(président-rapporteur)

*Madame Anne Bourlioux*

---

(directrice de recherche)

*Madame Lael Parrott*

---

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

*12 février 2007*

---



## SOMMAIRE

---

Ce mémoire est une étude préliminaire dans le cadre du développement d'un outil de simulation de feux de forêt destiné entre autres à l'industrie forestière. Les outils de simulation qui existent présentement ne sont pas à la pointe en ce qui concerne la prédiction numérique de l'évolution d'une interface. Les modèles mathématiques utilisés pour décrire la dynamique du feu dans les codes existants sont aussi relativement rudimentaires et ne permettent pas des prédictions fiables.

La première partie de ce travail consiste à résumer les principes liés à la combustion de végétaux ainsi qu'à la description des différents paramètres influençant la vitesse de propagation d'un front de flamme. On y discute aussi des types de modèles existant en énonçant leurs forces et faiblesses.

Dans le deuxième chapitre, nous décrivons comment l'approche iso-niveaux (*Level-set*) pourrait être avantageusement utilisée pour la simulation de feux de forêts. On explique les étapes pour obtenir l'équation d'évolution d'une courbe et la méthode numérique utilisée pour résoudre cette équation. On illustre l'efficacité de la méthode *Level-Set* par quelques exemples où la méthode conventionnelle des marqueurs est problématique notamment lors de la fusion de deux fronts.

Le chapitre 3 présente les grandes lignes d'un modèle empirique, celui de Rothmel. C'est LE modèle de référence dans cette classe de modèles, il a inspiré un grand nombre des modèles utilisés en pratique. Vu sa nature empirique, il souffre d'un certain nombre de limitations, mais il nous servira ici à des fins de

comparaison et de calibration dans son domaine présumé de validité.

La suite du travail est consacrée à l'étude et la mise en oeuvre du modèle dit théorique proposé par J.Margerit. Ce modèle utilise des notions de modélisation multi-échelle d'un feu de forêt, d'homogénéisation et de réduction dimensionnelle. Il en découle un système d'équations différentielles algébriques décrivant l'évolution de la température, de l'humidité et de la charge de combustible sur un domaine bidimensionnel.

En vue du couplage avec la méthode *Level-set*, nous examinons la version unidimensionnelle de ce système d'équations, c'est-à-dire le cas d'un front plan infiniment long. On cherche la vitesse de propagation sous des conditions uniformes pour la végétation, la topographie et le vent.

Cependant, lors du calcul de cette vitesse, certains paramètres servant au calcul de la vitesse sont inconnus. Nous procédons donc à une calibration du modèle théorique avec l'aide du modèle empirique de Rothermel. Ceci permet l'étude du modèle surtout au niveau des facteurs de la pente du terrain et du vent. On présente finalement un exemple de simulation avec une base de données réaliste.

**Mots clés:** Modélisation de feux de forêt, modèle multi-échelle, homogénéisation, modèle de Rothermel, vitesse de propagation, méthode iso-niveaux (*Level-Set*).

## SUMMARY

---

This thesis is a preliminary study for the development of a forest fire simulation tool intended for the forest industry. Thus far, the available simulation tools are not at the cutting edge when it comes to representing an interface's numerical evolution. In addition, the mathematical models used to describe the dynamics of a fire in the available codes are relatively elementary and do not allow reliable predictions.

The first part of this work consists in summarizing the principles related to a plant's combustion as well as the description of the various parameters determining the propagation speed of a flame's front. The strengths and weaknesses of the different existing models are also discussed.

In the second chapter, we describe the benefits of using the Level-Set approach to simulate forest fires. The steps to obtain the equation for a curve's evolution and the numerical method used to solve this equation are explained. We illustrate the effectiveness of the Level-Set method using some examples where the conventional marker method is problematic, in particular when two fronts merge.

Chapter 3 presents a broad outline of Rothermel's empirical model. It is the reference model in its class, and it has inspired a great number of the models used in practice. Considering its empirical nature, it suffers from a certain number of limitations. It will nevertheless be used in its supposed valid context for comparison and calibration.



The rest of this work is devoted to the study and implementation of the theoretical model proposed by J. Margerit. This model uses multiscale concepts for forest fires, homogenization and dimensional reduction. This leads to an algebraic differential system which describes the evolution of temperature, humidity and fuel charge in a bidimensional domain.

In view of the coupling with the Level-Set method, we examine the unidimensional version of this system, i.e. the case of a infinitely long plane front. We seek the speed of the propagation under uniform conditions for vegetation, topography and wind.

Certain parameters being used for the calculation of the speed are unknown. We thus proceed to a calibration of the theoretical model with the assistance of Rothermel's empirical model. This allows the study of the model, especially as the slope of the ground and the wind, are varied. Finally, we present a simulation example with a realistic data set.

**Key words:** forest fire modeling, multiscale modeling, homogenization, Rothermel model, forest fire speed, Level-Set method.

## REMERCIEMENTS

---

Tout d'abord, je tiens à remercier ma directrice de recherche, madame Anne Bourlioux. Elle a été d'une aide précieuse tout au long de mes études et surtout lors de mes recherches. Sans elle, je serais passé à côté de plusieurs points importants. Je veux également la remercier pour son appui financier.

Un très grand merci à celui que je nomme Maître Étienne. Les deux années de maîtrise auraient été longues sans vous. Merci pour l'écoute, merci pour votre présence et merci pour tout ce que j'oublie. Merci également à ma famille pour le soutien qu'elle m'a apporté.

Merci à M. Francis Forget et M. Miguel Chagnon pour leur support technique.

Finalement, je veux dire merci à ma copine Brigitte pour sa présence et son soutien.

# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Sommaire</b> .....	iii
<b>Summary</b> .....	v
<b>Remerciements</b> .....	vii
<b>Liste des figures</b> .....	xiii
<b>Liste des tableaux</b> .....	xvi
<b>Introduction</b> .....	1
<b>Chapitre 1. Les feux de forêt</b> .....	4
1.1. Anatomie d'un feu .....	4
1.2. Mécanismes de propagation de la chaleur .....	5
1.2.1. Le rayonnement .....	5
1.2.2. La convection .....	5
1.2.3. La conduction .....	6
1.3. Facteurs influençant la propagation d'un feu de forêt .....	6
1.3.1. Le type de végétation .....	6
1.3.2. L'humidité .....	7
1.3.3. L'inclinaison du sol .....	8
1.3.4. Le vent .....	8
1.4. Les différents types de modèle .....	9
1.4.1. Les modèles probabilistes .....	9
1.4.2. Les modèles semi-empiriques .....	11

1.4.3. Les modèles théoriques.....	12
<b>Chapitre 2. La méthode <i>Level-Set</i> .....</b>	<b>13</b>
2.1. La méthode des marqueurs.....	13
2.1.1. Le principe .....	13
2.1.2. La problématique.....	14
2.2. La méthode <i>Level-Set</i> .....	15
2.2.1. Dérivation de l'équation <i>Level-Set</i> .....	15
2.2.2. Initialisation de $\phi$ .....	17
2.3. Résolution numérique.....	17
2.3.1. Maillage et notation .....	17
2.3.2. Première approche.....	18
2.3.3. Schéma numérique utilisé .....	20
2.3.4. Explication du schéma .....	21
2.4. Exemples .....	23
2.4.1. Cas unidimensionnel .....	23
2.4.2. Propagation bidimensionnelle de coins .....	23
2.4.3. Fusion de courbes.....	24
<b>Chapitre 3. Le modèle de Rothermel .....</b>	<b>28</b>
3.1. Obtention du modèle .....	28
3.2. Problèmes liés à la pente et au vent .....	29
3.2.1. Problèmes liés à la pente et amélioration du modèle par McArthur	30
3.2.2. Simulations sur des plans inclinés .....	30
3.2.3. Problème du vent .....	33
3.3. Restrictions du modèle de Rothermel.....	33
<b>Chapitre 4. Modèle de Jonathan Margerit .....</b>	<b>34</b>

4.1. Les échelles .....	35
4.1.1. Échelle gigascopique .....	35
4.1.2. Échelle macroscopique .....	35
4.1.3. Échelle mésoscopique .....	37
4.1.4. Échelle microscopique .....	37
4.1.5. Synthèse .....	37
4.2. Équations macroscopiques des strates de l'air ambiant et du sol ...	40
4.2.1. Équations macroscopiques de la strate de l'air ambiant .....	40
4.2.2. Équations macroscopiques de la strate du sol .....	43
4.3. Équations macroscopique de la strate végétale .....	43
4.3.1. Équations mésoscopiques .....	43
4.3.1.1. Équations de la phase gazeuse .....	43
4.3.1.2. Équations de la phase poreuse (végétale) .....	44
4.3.2. Conditions aux bords entre les phases poreuse et gazeuse .....	47
4.3.3. Obtention des équations macroscopiques pour la strate végétale par prise de moyenne .....	48
4.3.3.1. Prolongement des variables et des équations .....	48
4.3.3.2. Fonctions de distribution .....	49
4.3.3.3. Exemple de prise de moyenne .....	50
4.3.3.4. Équations homogénéisées .....	51
4.3.4. Fermeture du système .....	55
4.3.5. Conditions aux bords des différentes strates .....	57
4.4. Équations à l'échelle gigascopique : réduction du système macroscopique tridimensionnel à un système bidimensionnel .....	58
4.4.1. Hypothèses .....	59
4.4.2. Exemple de réduction de dimension .....	59
4.5. Flux radiatif $\mathcal{M}_r$ .....	60

4.5.1. Adimensionnalisation .....	61
4.5.2. Système d'équations adimensionnalisées .....	62
<b>Chapitre 5. Modèle de Margerit dans le cas unidimensionnel....</b>	<b>65</b>
5.1. Étude du front unidimensionnel .....	65
5.1.1. Motivation .....	65
5.1.2. Simplification du flux radiatif .....	65
5.2. Vitesse stationnaire .....	67
5.2.1. Équations stationnaires .....	67
5.2.2. Méthode de flux constant .....	69
5.2.3. Méthode de résolution de la zone 2 .....	70
5.2.4. Obtention de la vitesse et de la largeur stationnaire .....	71
5.3. Vérification de la stationnarité .....	72
5.3.1. Problème lors de la résolution avec la méthode d'Euler avant ...	72
5.3.2. Solveurs de <i>Matlab</i> .....	74
5.3.3. Méthode de prolongement .....	75
5.3.4. Initialisation des profils stationnaires .....	77
5.3.5. Dynamique stationnaire .....	77
5.4. Ajout des facteurs pente et vent .....	78
5.4.1. Flux radiatif général .....	78
5.4.2. Simplification du flux radiatif pour un front unidimensionnel ...	80
5.4.3. Obtention des différents vecteurs unitaires .....	81
<b>Chapitre 6. Calibrage et simulations .....</b>	<b>83</b>
6.1. Paramètres du modèle de Margerit .....	83
6.2. Calibrage .....	84
6.2.1. Détermination de $h_f$ .....	85
6.2.1.1. Méthodologie .....	85

6.2.1.2. Tests du coefficient de corrélation et du VIF .....	86
6.2.1.3. Choix du modèle.....	87
6.2.1.4. Problème de l'équation 6.2.6 .....	89
6.2.1.5. Nouvelle forme pour $h_f$ .....	90
6.2.2. Choix pour $P_{ext}$ .....	91
6.3. Validité du modèle pour les facteurs pente et vent.....	92
6.3.1. Analyse de $\Lambda$ .....	93
6.4. Simulations .....	96
6.4.1. Mise en oeuvre du modèle avec la méthode <i>Level-Set</i> .....	96
6.4.2. Simulation sans pente, ni vent .....	97
6.4.3. L'effet de la pente.....	98
6.4.4. Effet du vent.....	100
6.4.5. Simulation avec une base de données .....	101
<b>Conclusion.....</b>	<b>107</b>
<b>Bibliographie .....</b>	<b>110</b>
<b>Annexe A. Équations du modèle de Rothermel .....</b>	<b>A-i</b>
A.1. Données physiques .....	A-i
A.2. Équations .....	A-i
<b>Annexe B. Paramètres du modèle de Margerit.....</b>	<b>B-i</b>
<b>Annexe C. Erreurs commises lors du choix du modèle pour la</b>	
<b>hauteur de la flamme .....</b>	<b>C-i</b>
C.1. Analyse du premier modèle.....	C-i
C.2. Modèle fourni par l'équation 6.2.10 .....	C-viii

## LISTE DES FIGURES

---

1.3.1 Facteurs vent et pente .....	8
1.4.1 Exemple de simulation avec un modèle probabiliste .....	10
2.1.1 Exemple de propagation avec la méthode des marqueurs.....	14
2.1.2 Exemple de propagation d'une courbe concave avec la méthode des marqueurs. ....	14
2.1.3 Exemple de la propagation attendue d'un feu concave. ....	15
2.2.1 Principe de la méthode <i>Level-Set</i> .....	16
2.3.1 Explication du maillage du domaine. ....	18
2.3.2 Propagation de la fonction $f(x) =  x $ avec un schéma aux différences centrées avec $\Delta t = 0.05$ , $\Delta x = 0.1$ . Le temps final est 0.7 et on voit l'évolution à toutes les deux itérations. ....	20
2.3.3 Explication du schéma arrière pour le cas où $a > 0$ . ....	22
2.3.4 Explication du schéma avant pour le cas où $a < 0$ . ....	23
2.4.1 Propagation de la fonction $f(x) =  x $ avec le schéma 2.4.1 avec $\Delta t = 0.05$ , $\Delta x = 0.05$ . Le temps final est 0.7 et on voit l'évolution à toutes les deux itérations. ....	24
2.4.2 Propagation d'un carré, $\Delta t = 0.05$ , $\Delta x = 0.05$ . ....	26
2.4.3 Fusion de deux cercles qui se propagent dans le plan.....	27
3.2.1 Évolution du front sur un terrain plat avec une végétation uniforme. Le front est illustré à toutes les 15 minutes. ....	31



3.2.2	Évolution du front sur une pente ayant une élévation de $\pi/16$ . Le front est illustré à toutes les 15 minutes. ....	32
3.2.3	Évolution du front sur une pente ayant une élévation de $\pi/4$ . Le front est illustré à toutes les 15 minutes. ....	32
4.1.1	Vue gigascopique. ....	36
4.1.2	Vue macroscopique. ....	36
4.1.3	Diagramme des différents focus. ....	38
4.3.1	Frontière entre les phases poreuse et gazeuse. ....	47
5.1.1	Agrandissement en un point du front. ....	66
5.1.2	Changement de système de coordonnées. ....	66
5.2.1	Graphique des différentes zones du modèle. ....	67
5.3.1	Profil de la température pour des pas de temps de 0.01 et 0.05 après un certain temps. ....	73
5.3.2	Graphique montrant le profil de température pour deux pas de temps différents avec Euler avant. On y voit l'explication du problème. ....	73
5.3.3	Largeur des différentes zones en fonction du temps. La vitesse est environ de 0.1 en variable adimensionnée. ....	78
5.4.1	Graphique tridimensionnel montrant les différents vecteurs directeurs. ....	80
5.4.2	Illustration des variables pour $\theta_{el} > 0$ . ....	81
5.4.3	Illustration des variables pour $\theta_{el} < 0$ . ....	82
6.2.1	Vitesse en fonction de la charge pour $h_f$ donné par 6.2.6. ....	90
6.2.2	Vitesse en fonction de la charge pour $h_f$ donné par 6.2.9. On y voit aussi la vitesse de Rothermel. ....	92
6.3.1	$\Lambda$ en fonction de $\theta_{el}$ . ....	94
6.3.2	$\Lambda$ en fonction de la norme signée de la vitesse du vent. ....	94

6.3.3	$\Lambda$ en fonction de $\alpha_f$ . . . . .	95
6.3.4	$\alpha_f^c$ en fonction de $\cos(\phi - \phi_f)$ . . . . .	95
6.4.1	Simulation avec une charge initiale choisie au hasard, sans vent sur un terrain plat. Les axes sont en mètre. . . . .	98
6.4.2	Évolution du front sur un terrain plat avec le modèle de Margerit, toutes les 15 minutes. . . . .	99
6.4.3	Évolution du front un plan incliné ( $\theta_{el} = \pi/16$ ) avec le modèle de Margerit, toutes les 15 minutes. . . . .	100
6.4.4	Simulation avec une végétation uniforme avec un vent soufflant de gauche à droite. . . . .	101
6.4.5	Distribution de $P_{ini}$ . . . . .	102
6.4.6	Topographie. . . . .	102
6.4.7	Simulation avec le modèle de Rothermel. . . . .	104
6.4.8	Simulation avec le modèle de Margerit. . . . .	105
C.1.1	Erreur relative de prédiction de $h_f$ en fonction de $\sigma$ pour le modèle 1. C-ii	
C.1.2	Erreur relative de prédiction de $h_f$ en fonction de $\delta$ pour le modèle 1. C-iii	
C.1.3	Erreur relative de prédiction de $h_f$ en fonction de $P_{ini}$ pour le modèle 1. . . . .	C-iii
C.1.4	Erreur relative de prédiction de $h_f$ en fonction de $\rho_p$ pour le modèle 1. C-iv	
C.1.5	Erreur relative de prédiction de $h_f$ en fonction de $H$ pour le modèle 1. C-iv	
C.1.6	Erreur absolue de prédiction de $h_f$ en fonction de $\sigma$ pour le modèle 1. C-v	
C.1.7	Erreur absolue de prédiction de $h_f$ en fonction de $\delta$ pour le modèle 1. C-v	
C.1.8	Erreur absolue de prédiction de $h_f$ en fonction de $P_{ini}$ pour le modèle 1. . . . .	C-vi
C.1.9	Erreur absolue de prédiction de $h_f$ en fonction de $\rho_p$ pour le modèle 1. C-vii	
C.1.10	Erreur absolue de prédiction de $h_f$ en fonction de $H$ pour le modèle 1. C-vii	

## LISTE DES TABLEAUX

---

3.2.1 Jeux de données #2.....	30
4.1.1 Tableau des différentes échelles et ce qu'il y a à retenir selon le modèle de Margerit [10]. ....	39
5.2.1 Itérations de point fixe pour différents jeux de données. La vitesse est en $m/min$ . ....	71
5.3.1 Tableau de certaines données fournies par <i>ode23</i> .....	74
5.3.2 Tableau des différents paramètres adimensionnalisés utilisés pour la vérification de la stationnarité.....	78
6.2.1 Valeurs des différentes variables utilisées pour le calibrage.....	85
6.2.2 Les dix modèles sélectionnés par SAS avec la méthode pas à pas.....	86
6.2.3 Les dix modèles sélectionnés par SAS avec leur $R^2$ et leur VIF maximal.	88
6.4.1 Jeux de données pour les simulations avec le modèle de Margerit. ....	98
6.4.2 Jeux de données pour les simulations avec le modèle de Margerit avec une végétation uniforme.....	99

# INTRODUCTION

---

La forêt est l'une des principales ressources du Québec et du Canada. Elle est constituée de plusieurs espèces végétales qui procurent un habitat idéal pour une grande partie de la faune animale. Elle apporte également d'énormes gains économiques à l'industrie forestière. Malheureusement, la forêt n'est pas à l'abri de la destruction. L'un des grands dangers qui la guettent est le feu. Qu'ils soient d'origine naturelle ou humaine, les feux de forêt sont sans doute les plus gros destructeurs de cette ressource et à chaque année, ils entraînent des pertes énormes. Par exemple, en 2005 au Québec, il y a eu 1258 incendies qui ont brûlé environ 400 000 hectares [14] des 75 030 000 hectares couverts de forêts au Québec. Cela représente plusieurs millions de dollars perdus par l'industrie. Outre ces pertes, ces feux ont aussi été une menace pour la vie des pompiers ainsi que pour les habitations à proximité des forêts.

Il serait donc intéressant de simuler par ordinateur des feux de forêt. Cela serait très utile pour connaître l'évolution d'un feu en cours afin d'aider dans la lutte contre l'incendie. Cela pourrait également servir dans des plans d'aménagement préventifs de la végétation autour des zones peuplées pour réduire les risques. Présentement, il existe quelques logiciels permettant d'obtenir des résultats intéressants, mais ils possèdent tous des problèmes ou bien ils ne s'appliquent tout simplement pas à la problématique rencontrée au Canada. Le but de ce travail est de réaliser une étude préliminaire d'un modèle de feux en vue de son utilisation dans le contexte décrit ci-dessus. Cette étude portera principalement à la dérivation et à l'utilisation d'un modèle multi-échelle. On comparera les résultats obtenus avec un modèle déjà établi dans l'industrie afin de vérifier si les forces de

l'un corrige les faiblesses de l'autre et vice-versa.

Le premier chapitre est essentiellement un résumé des phénomènes physiques importants reliés à la combustion de la matière organique et aux facteurs influençant la propagation des feux de forêt. Il est primordial de bien les connaître pour apprécier le type de modèles que nous utiliserons. Nous discutons également des différents types de modèle qui existent dans la littérature. Nous regardons les avantages et les inconvénients de chacun.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons la méthode dite *Level-Set* (méthode des iso-niveaux). Celle-ci permet de propager une courbe quelconque sans l'apparition de problèmes liés aux fronts concaves, aux barrières et aux champs de vitesse non-uniformes. Tous ces problèmes sont rencontrés par plusieurs logiciels de simulation de feux de forêt qui utilisent la technique des marqueurs pour suivre la propagation du front de flamme.

Le chapitre trois donne une rapide description du modèle de Rothermel (1972) [5]. Ce dernier est à la base des modèles utilisés pour la lutte des feux de forêt aux États-Unis (FARSITE) et au Canada (BEHAVE et Prometheus). Il est aussi question des failles de ce type de modèle. Nous présentons quelques petites simulations pour montrer l'efficacité de la méthode *Level-Set* dans la simulation des feux de forêt basée sur ce modèle.

Le chapitre quatre se veut un résumé de la thèse de doctorat de Jonathan Margerit [10]. Nous y présentons sa modélisation d'un feu de forêt à diverses échelles ainsi que l'homogénéisation et la réduction dimensionnelle qu'il a utilisées afin d'obtenir un système d'équations différentielles algébriques pour décrire l'évolution du front dans le temps.

Dans le chapitre cinq, nous étudions l'application du modèle de Margerit dans le cas simple d'un front unidimensionnel sans vent ni pente. Nous y développons

une méthode numérique pour résoudre les équations dans ce cas simplifié. Elle nous permet, entre autres, d'extraire la vitesse de propagation, dont nous nous servons dans le chapitre six pour propager des fronts multidimensionnels.

Dans le chapitre six, nous calibrons les paramètres inconnus du modèle de Margerit par comparaison avec les prédictions du modèle de Rothermel. Nous ajoutons les facteurs vent et pente. Finalement, nous illustrons la performance par quelques simulations.

# Chapitre 1

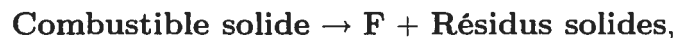
---

## LES FEUX DE FORÊT

Pour être en mesure de bien modéliser un phénomène, il faut bien le comprendre, savoir ce qui l'influence et de quelle manière. C'est pourquoi dans la prochaine section, nous étudions la physique et la chimie d'un feu de forêt. Plus précisément, nous regardons les différents modes de propagation de la chaleur ainsi que les différents paramètres qui influencent la vitesse du front. Il est également question des différents types de modèles existant pour étudier ces feux.

### 1.1. ANATOMIE D'UN FEU

Les feux dont il est question ici se rapportent à la combustion de matières organiques (végétales). Celle-ci s'effectue en cinq temps. La première phase est l'élévation de la température du combustible vers la température d'évaporation de l'eau (373K). Une fois cette température atteinte, commence la phase deux. C'est celle de l'évaporation de l'eau, à température constante. Lorsqu'il n'y a plus d'eau, la phase trois commence, la température recommence à augmenter pour atteindre celle de la pyrolyse. La pyrolyse est la dégradation chimique que subit un combustible solide en présence d'une source de chaleur suffisante. La réaction chimique s'écrit de manière générale comme suit :



où  $\mathbf{F}$  sont de petites molécules appelées volatiles. À ce moment, la chaleur provoque l'évaporation des volatiles  $\mathbf{F}$ . Lorsque la température atteint la température d'inflammation (environ 600K), nous entrons dans la phase dite "flamme" de la combustion. Il est à noter que la température d'inflammation n'est que légèrement

au-dessus de celle de la pyrolyse. Plus tard, nous ne distinguerons pas ces deux phases. Les volatiles entrent en combustion et c'est la lumière qu'ils émettent que l'on nomme flamme. La température monte alors aux environs de 1300K. Lorsque toutes les petites molécules ont été brûlées à la surface du combustible, nous passons à la phase latente de la combustion. La température s'abaisse à environ 700K tout en restant en haut de la température d'inflammation. À ce moment, il n'y a plus de flamme, mais la présence de tisons. Si cette phase n'est pas complétée, on dit alors que l'on a une combustion incomplète. Pour les chimistes, une combustion complète implique que tout le combustible est devenu de l'eau et du gaz carbonique. L'étude approfondie de la phase latente de la combustion n'est pas essentielle à l'étude de la propagation d'un feu de forêt et ne sera plus abordée dans le reste de ce mémoire. Par contre, ce serait un élément important afin de bien modéliser la régénération d'une forêt.

## 1.2. MÉCANISMES DE PROPAGATION DE LA CHALEUR

Il existe trois mécanismes de propagation de la chaleur. Ils ont chacun leurs particularités et une importance qui varie selon les types de feux de forêt.

### 1.2.1. Le rayonnement

Le rayonnement est le mécanisme principal dans les feux de forêt de petites intensités. Il s'agit de la chaleur transmise par le rayonnement direct de la source de chaleur. C'est, par exemple, le mode de propagation de la chaleur du soleil. Il sera donc important de bien modéliser ce mécanisme. Nous étudierons ce mécanisme plus en détail dans le modèle de Margerit.

### 1.2.2. La convection

La convection est le mouvement de la chaleur que l'on identifie sous deux formes : naturelle et forcée. La première est causée par la densité plus faible des substances chaudes, ce qui crée un mouvement vertical. La convection forcée provient de l'advection par les vents. La convection est un phénomène très important lorsque le feu possède une grande intensité. L'air chaud s'élève à plusieurs mètres,



parfois même des dizaines ou des centaines de mètres. Le couplage avec les conditions météorologiques est alors nécessaire surtout si les vents sont grands. Ainsi, la convection est un phénomène très important lors des feux de grande intensité.

### 1.2.3. La conduction

Le mécanisme de conduction est le passage de chaleur par contact direct entre un objet et la source de chaleur. Ce mode de propagation est en général négligé dans la modélisation de feux de forêt. En ce qui concerne la phase solide, le sol et le bois sont de très mauvais conducteurs de chaleur. En ce qui concerne la phase gazeuse, la conduction est négligeable comparée au rayonnement et à la convection, du moins aux grandes échelles. Par contre, certains modèles l'intègrent comme nous le verrons dans le modèle de Margerit.

## 1.3. FACTEURS INFLUENÇANT LA PROPAGATION D'UN FEU DE FORÊT

Plusieurs facteurs influencent la vitesse de propagation d'un feu de forêt. Analysons, de manière qualitative pour l'instant, le rôle de ces paramètres.

### 1.3.1. Le type de végétation

Le type de végétation est un facteur qui influence énormément la propagation et ce, pour diverses raisons. Premièrement, chaque espèce végétale possède sa propre température d'inflammation à cause de sa constitution chimique. Puisque dans une forêt, il y a plusieurs types de combustibles présents, on ne regarde pas chaque composante de celle-ci. On effectue plutôt une généralisation en créant différentes classes de forêts, que l'on nomme types de combustibles. Par exemple, les forêts canadiennes sont regroupées en huit classes ([1] pages 28-29). Chacune de ces classes correspond à un type de végétation (conifère sec, herbe, ...) possédant des caractéristiques similaires. Cela permet, entre autres, de connaître la température d'inflammation moyenne et la chaleur requise pour la combustion.

Le type de combustible affecte aussi la charge de combustible (en  $kg/m^2$ ), c'est-à-dire la densité surfacique de végétation résultant de sa disposition sur le

terrain. Par exemple, dans le cas de la toundra, les plants sont collés les uns aux autres et il y a donc un très bon rayonnement. Lorsque la charge augmente, cela fait croître la chaleur émise par le front de flamme et il y a plus de chaleur disponible pour débiter la combustion de la végétation voisine. Par contre, si la densité surfacique est trop grande, on remarquera que la vitesse diminue. Cela s'explique par le fait que le front ne produit plus suffisamment de chaleur pour enflammer le combustible. Ce que nous venons de mentionner n'est pas vrai lorsque la combustion se fait dans un milieu fermé où la quantité d'oxygène est limitée. Dans notre problème, nous supposons que la quantité d'oxygène est illimitée.

Une autre quantité importante reliée au type de végétation est  $\sigma$  (en  $m^{-1}$ ), le rapport surface/volume pour chaque particule végétale (brin d'herbe, feuille, branche, ...). Ce paramètre est présent dans plusieurs modèles notamment dans les modèles de Rothermel et de Margerit que nous étudierons plus loin. Il quantifie la géométrie des particules végétales.

D'autres variables, telles que  $\rho_p$ , la densité de la particule végétale (en  $kg/m^3$ ) et la hauteur de la végétation, doivent être prises en considération.

### 1.3.2. L'humidité

L'humidité du combustible est aussi un élément important dans le calcul de la vitesse du front. Elle affecte la chaleur d'inflammation. Comme il a déjà été vu, pour qu'un objet s'enflamme, il faut qu'il atteigne le seuil de la température d'inflammation. Lorsqu'on parle des combustibles dans la forêt, cette dernière est supérieure à 600K. Cependant, la température d'ébullition de l'eau est de 373K. Ainsi, la chaleur est tout d'abord utilisée pour l'évaporation de l'eau et, par la suite, elle sert à augmenter la température du combustible jusqu'à ce que ce dernier commence à brûler. Donc, plus les végétaux possèdent d'eau, plus il leur faudra d'énergie pour qu'ils s'enflamment. C'est la raison pour laquelle il est plus facile de faire brûler un conifère qu'un feuillu. Il existe une formule empirique qui nous donne la chaleur d'inflammation  $Q_{ig}$  (en  $KJkg^{-1}$ ) en fonction du rapport de la masse d'eau dans le combustible sur la masse sèche du combustible  $m$  (en

pourcentage) ([1] page 48) :

$$Q_{ig} \approx 460 + 26m$$

Cette formule reflète bien le fait que plus le combustible est sec, moins il lui faut de chaleur pour s'enflammer. Similairement, lorsqu'il pleut, le pourcentage d'eau du combustible augmente, entraînant une diminution des feux.

### 1.3.3. L'inclinaison du sol

Contrairement à ce qu'on pourrait croire, un front de flamme se propage plus rapidement lorsqu'il grimpe une pente que lorsqu'il la descend. Cela est surtout dû au fait que la source de chaleur est plus près du combustible. Cela entraîne un meilleur rayonnement et une meilleure combustion. Il y a aussi une augmentation de la convection (bien que ce mode de propagation soit négligeable comparativement au rayonnement lorsque l'intensité de l'incendie est petite). Inversement, lorsque le front descend une pente, il y a perte de chaleur, car il y a un contact moins direct entre le feu et le combustible. Ainsi, le front voyagera moins vite. Le graphique 1.3.1 illustre ce qui se produit avec la flamme dans différents cas.

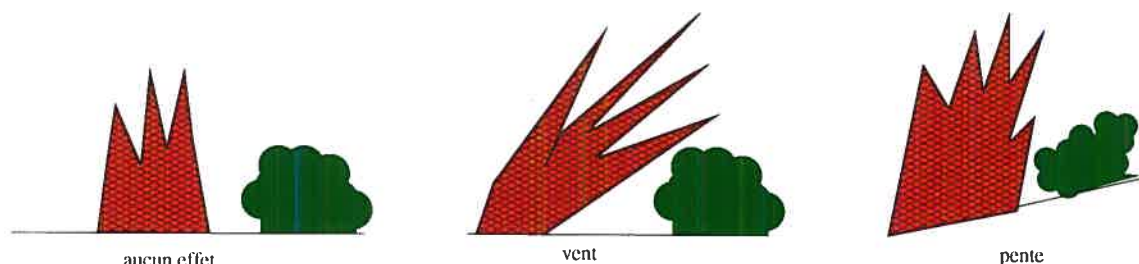


FIG. 1.3.1. Facteurs vent et pente

### 1.3.4. Le vent

Dès que le vent devient grand, plusieurs phénomènes se produisent. La figure 1.3.1 illustre également ce facteur. Tout d'abord, il agit sur la propagation du front un peu de la même manière que l'inclinaison du sol. Il y a un meilleur rayonnement et une plus grande surface de contact dans la direction du vent. D'autre part, le phénomène de convection prend une place plus importante. L'intensité du feu augmente et des colonnes de gaz chaud montent à des hauteurs de l'ordre de

centaines de mètres. Ainsi, les vents de hautes altitudes doivent être considérés. Il y a également le phénomène des sauts de feux qui survient avec ces vents. Des particules en combustion sont transportées par le mouvement de convection de l'air chaud et par la suite elles sont amenées plus loin par le vent. Si elles sont encore en combustion, il y a des chances qu'elles allument un incendie plus loin. Cela est très dangereux pour les sapeurs. Le phénomène de sauts de feux est un processus aléatoire très difficile à modéliser. Il ne sera pas discuté dans ce mémoire.

#### 1.4. LES DIFFÉRENTS TYPES DE MODÈLE

La simulation de feux de forêt se divise en deux composantes : la modélisation, qui nous donne la manière dont se propage le front, et l'algorithme de propagation, qui permet d'obtenir une représentation numérique du mouvement du front en accord avec le modèle. Dans certaines modélisations, ces deux composantes ne font qu'une. Nous y reviendrons plus loin. Regardons maintenant les différents types de modèles de feux de forêt. Ils ont chacun leurs avantages et leurs désavantages. Il faut donc être en mesure de savoir ce que l'on veut en tirer pour savoir lequel choisir. On classe les modèles en trois types : probabiliste, semi-empirique et théorique.

##### 1.4.1. Les modèles probabilistes

Le modèle probabiliste consiste à associer à une cellule du domaine une probabilité d'inflammation et d'effectuer plusieurs simulations afin de voir le comportement de l'incendie. Regardons le principe général de ce modèle. Premièrement, on divise le domaine en carrés  $C_{i,j}$ . Chaque carré  $C_{i,j}$  possède un état initial. Typiquement, on a les trois états suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ intact ;} \\ 1, \text{ en combustion ;} \\ 2, \text{ brûlé.} \end{array} \right.$$

La probabilité d'inflammation de chacun de ces carrés est donnée par  $p_{i,j}$ . Cette probabilité dépend des divers facteurs mentionnés plus tôt. On fournit également

des règles de propagation. Par exemple, des règles simples pourraient être que si au temps discret  $n\Delta t$  un carré  $C_{i,j}$  est à l'état 1, alors au temps  $(n+1)\Delta t$ ,

- $C_{i,j}$  sera à l'état 2
- les carrés  $C_{i-1,j}$ ,  $C_{i+1,j}$ ,  $C_{i,j-1}$  et  $C_{i,j+1}$  qui sont à l'état 0 à  $t = n\Delta t$  passent à l'état 1 avec la probabilité  $p_{i-1,j}$ ,  $p_{i+1,j}$ ,  $p_{i,j-1}$  et  $p_{i,j+1}$ .

La figure 1.4.1 montre un exemple de simulation avec un tel modèle. On pose la probabilité de propagation égale à 0.3. L'utilisateur clique sur la figure afin d'entrer les zones en feu. La version décrite est la version la plus élémentaire

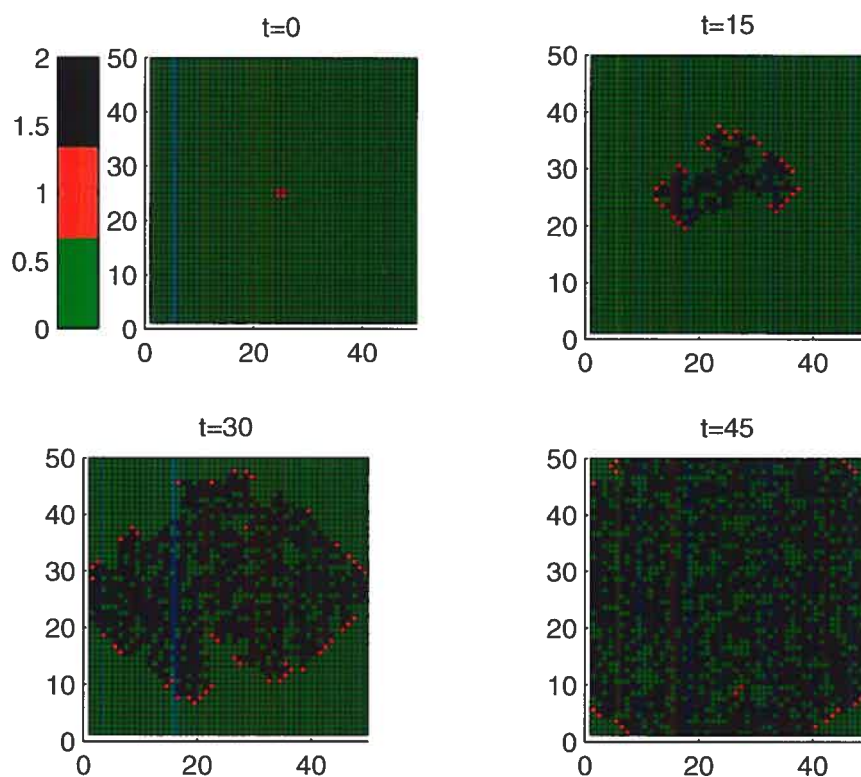


FIG. 1.4.1. Exemple de simulation avec un modèle probabiliste

des modèles probabilistes. Plusieurs autres modèles sont plus complets et raffinés. Néanmoins, même avec l'ajout de plusieurs autres détails, il reste difficile d'en extraire certaines données comme la vitesse de propagation et la température atteinte. Ainsi, ce type de modèle sert plus à obtenir une vue globale de la propagation que d'extraire des données quantitatives. Il est très utile lorsque l'on cherche, par exemple, la probabilité qu'un incendie atteigne une région habitée. Il

peut également servir à vérifier certains paramètres comme la charge et l'humidité d'extinction, en dessous desquelles on est assuré de l'extinction du feu.

#### 1.4.2. Les modèles semi-empiriques

Les modèles de type semi-empirique utilisent des outils théoriques ainsi que des résultats expérimentaux pour trouver la vitesse de propagation du front. Le père de ce type de modèle est le modèle de Rothermel (1972) [5]. Nous reviendrons plus en détail sur ce modèle un peu plus loin. Par la suite, plusieurs ont repris les expériences de Rothermel afin de raffiner le modèle ([16] et [6]). Dans chacun de ces cas, nous trouvons la vitesse normale du front, notée  $F$ , en fonction de certains paramètres de départ. Ces modèles se basent sur la loi de conservation d'énergie et sur des mesures prises en laboratoire. Cette vitesse  $F$  est obtenue à l'aide de l'équation

$$F = \frac{\text{flux de chaleur du front de flamme}}{\text{chaleur requise pour l'inflammation du combustible}}. \quad (1.4.1)$$

Nous verrons que cette forme revient plus loin dans le modèle de Margerit. Plusieurs simulateurs de feux de forêt utilisent une vitesse de propagation fournie par ces modèles semi-empiriques. Le simulateur FARSITE [7] est utilisé par le Département de l'Agriculture des États-Unis. On peut y simuler des feux de forêt et voir l'évolution. Ce logiciel est accessible via Internet [18]. Nous y retrouvons également d'autres simulateurs comme le BEHAVE [18]. Tous ces logiciels utilisent une méthode de marqueurs afin propager le front. Nous reviendrons sur cette méthode dans le prochain chapitre.

Bien que ce type de modèle soit utilisé par les services de lutte contre les feux de forêt, nous devons nous méfier des résultats obtenus. Premièrement, il s'agit de modèles basés sur des expériences en laboratoire. Ainsi, ils deviennent moins réalistes lorsqu'on est en présence d'un feu de grande intensité, car un tel feu ne peut pas être reproduit en laboratoire. De plus, ils ne considèrent pas les phénomènes qui se produisent plus haut que la zone en feu, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de couplage avec les conditions atmosphériques. Donc, ces modèles seront valides sous des hypothèses assez contraignantes. Par contre, ils sont très peu

coûteux en temps de calcul. Ainsi, si nous ne sommes pas trop loin des conditions dans lesquelles ont été effectuées les simulations, ces modèles sont très utiles.

### 1.4.3. Les modèles théoriques

Contrairement aux modèles semi-empiriques, les modèles de type théorique se basent essentiellement sur des outils théoriques. Ils utilisent les équations de la mécanique des fluides, les lois de la thermodynamique des processus irréversibles et des bilans énergétiques d'équations de réactions chimiques. Ils modélisent également sur plusieurs échelles. Ainsi, les hypothèses sont moins contraignantes. En principe, ces modèles restent assez réalistes pour des feux de grande intensité et avec de grands vents. On est donc en mesure de tirer plusieurs informations importantes. Par contre, ils sont très coûteux au point de vue du temps de calcul. Nous présenterons dans le chapitre 4 la description d'un de ces modèles, le modèle de Margerit.

Comme on peut le constater, chaque type de modèle possède des forces et des faiblesses. Les modèles semi-empiriques sont les plus utilisés par l'industrie à cause de la rapidité de calcul. Par contre, ils sont fiables seulement sous des conditions restreintes qui sont malheureusement les moins risquées pour les pompiers. Il faut donc un modèle assez robuste qui sera en mesure de bien décrire le comportement du front sous toutes les conditions possibles comme, par exemple, avec de grands vents.

## Chapitre 2

---

### LA MÉTHODE *LEVEL-SET*

Le but ici est de décrire un algorithme de simulation de la propagation de front en vue de l'application aux feux de forêts. Il faut donc être en mesure de propager une courbe dans l'espace. Une approche classique est la méthode des marqueurs ou une de ses cousines telle que l'approche des ellipses. Par contre, ce type de méthodes ne fonctionne pas toujours très bien. Nous verrons pourquoi dans la première section. C'est la raison pour laquelle nous avons opté pour l'approche des iso-niveaux (*Level-Set*). Cette façon de faire n'est pas encore très répandue dans le domaine de la simulation de feux de forêt. Nous expliquons en quoi consiste cette méthode, comment résoudre les équations et en quoi elle est meilleure que celle des marqueurs.

#### 2.1. LA MÉTHODE DES MARQUEURS

##### 2.1.1. Le principe

Le principe de la méthode des marqueurs est très simple. Il consiste à identifier quelques points sur la courbe que l'on cherche à propager. Étant donné la vitesse normale de la courbe en ces points ( $F(x, y)$ ), on déplace ceux-ci normalement à la courbe de la distance de  $F(x, y)\Delta t$  pour un court laps de temps  $\Delta t$ . Par la suite, on relie les points en suivant l'ordre défini au départ et on recommence cette routine. La figure 2.1.1 illustre la propagation d'une courbe suivant la méthode des marqueurs.



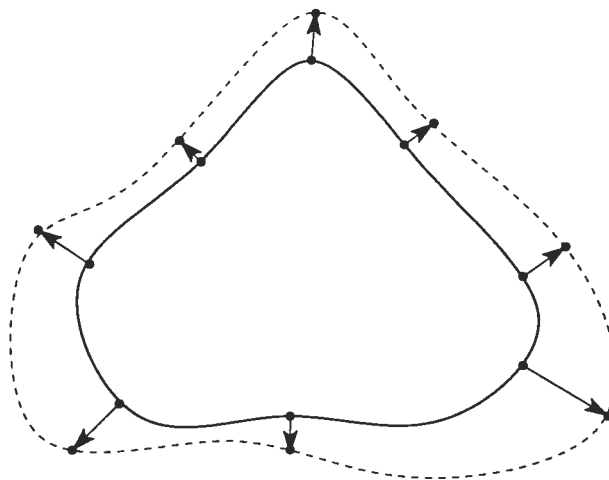


FIG. 2.1.1. Exemple de propagation avec la méthode des marqueurs.

### 2.1.2. La problématique

A priori, cette méthode est très simple et semble bien fonctionner. Par contre, ce n'est pas le cas lorsque la courbe développe une concavité. La figure 2.1.2 montre ce qui se produit. On remarque que le problème survient lorsque l'on relie

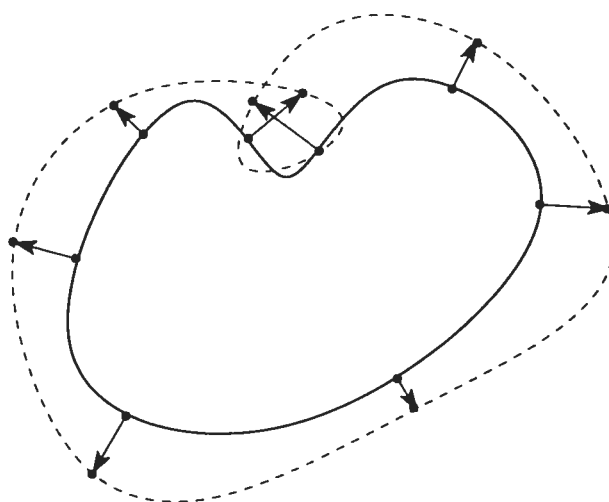


FIG. 2.1.2. Exemple de propagation d'une courbe concave avec la méthode des marqueurs.

les points dans l'ordre initial. Ainsi, si nous n'effectuons pas de diagnostic pour détecter ces croisements, on obtient le phénomène illustré à la figure 2.1.3. Dans le cas d'un feu de forêt, on s'attendrait à une fusion des deux parties de la courbe. Cependant, mettre en oeuvre un tel diagnostic peut devenir lourd et peut être

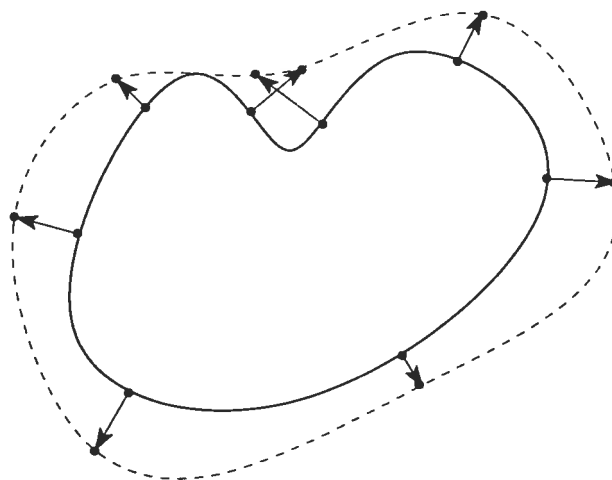


FIG. 2.1.3. Exemple de la propagation attendue d'un feu concave.

parfois difficile. Ce problème fut soumis par les représentants de Prometheus lors du *Pacific Institute for the Mathematical Sciences (PIMS) Industrial Problem Solving Workshop* à l'université *Simon Fraser* du 26 au 30 juin 2006. En réponse, nous avons proposé la méthode *Level-Set* comme alternative à la méthode des marqueurs. Présentons cette méthode.

## 2.2. LA MÉTHODE *Level-Set*

La méthode *Level-Set* est très utilisée dans plusieurs domaines, par exemple, en imagerie médicale et en hydrodynamique. Elle est très efficace pour décrire l'évolution de courbes et de surfaces dans le temps. Ici, nous restons dans le cas de la propagation d'une courbe dans  $\mathbb{R}^2$ , ce qui correspond bien à notre besoin pour les feux de forêt.

### 2.2.1. Dérivation de l'équation *Level-Set*

Soit une courbe initiale  $\Gamma(0)$  dans  $\mathbb{R}^2$  qui se propage avec le temps selon un champ de vitesse connu. Notre but est de connaître la famille de courbes  $\Gamma(t)$  pour  $t > 0$  telle  $\Gamma(t)$  est le résultat de l'évolution de la courbe  $\Gamma(0)$  après un certain temps  $t$ . La méthode *Level-Set* consiste à supposer que  $\Gamma(0)$  est la solution de  $\phi(x, y, t = 0) = 0$ , c'est-à-dire que  $\Gamma(0)$  est la courbe de niveau zéro d'une certaine fonction  $\phi(x, y, t = 0)$ . Étant donné  $\Gamma(0)$ , il y a plusieurs façons de définir  $\phi(x, y, t = 0)$ , on y revient plus loin. Il faut maintenant trouver un moyen

de faire évoluer  $\phi(x, y, t)$  de telle sorte que son niveau zéro coïncide avec  $\Gamma(t = T)$  pour tout temps  $T > 0$  donné. La figure 2.2.1 illustre le principe. Nous savons

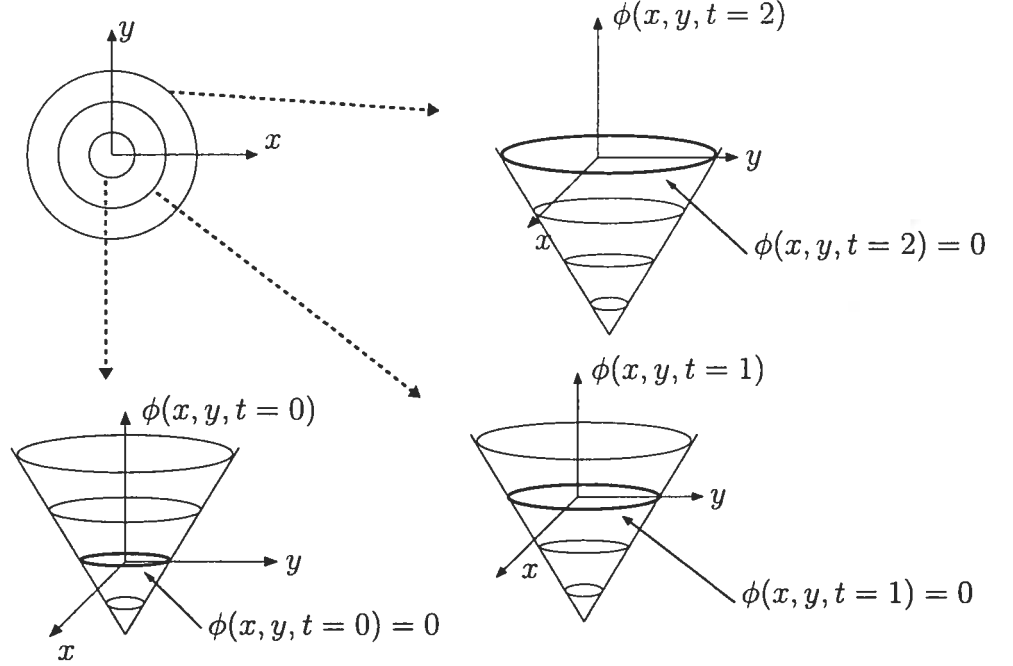


FIG. 2.2.1. Principe de la méthode *Level-Set*

que la courbe cherchée au temps  $t$  est donnée implicitement par

$$\phi(x(t), y(t), t) = \phi(\vec{r}(t), t) = 0. \quad (2.2.1)$$

En dérivant par rapport à  $t$ , nous obtenons

$$\phi_t + \nabla \phi \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 0. \quad (2.2.2)$$

Soit  $F(x, y, t)$  la norme de la vitesse normale à chacune des courbes de niveau de  $\phi$  au point  $(x, y)$  au temps  $t$ . (Dans le cas des feux de forêt, nous ne connaissons que la vitesse normale au niveau zéro. Cependant, nous devons la spécifier en tous les points du domaine afin de propager les autres niveaux. Il existe plusieurs façons d'extrapoler la vitesse et pour cela, nous référons à [8] et [9]. Dans les cas que nous étudions, nous supposons simplement que chacun des niveaux est un front d'un feu virtuel et, donc, nous utilisons la vitesse fournie par les différents modèles en ces points, mais nous nous intéressons seulement au niveau zéro. Nous pouvons utiliser cette méthode puisque, pour les modèles présentés dans ce mémoire, la

vitesse du front en un point ne dépend pas des autres points.) Avec  $F(x, y, t)$  définie partout, nous avons la relation

$$F(x, y, t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}, \quad (2.2.3)$$

qui correspond à la projection du vecteur vitesse sur la normale à la courbe. En substituant cette équation dans 2.2.2, nous obtenons l'équation *Level-Set* pour l'évolution de  $\phi(x, y, t)$  :

$$\phi_t(x, y, t) + F(x, y, t) |\nabla \phi(x, y, t)| = 0. \quad (2.2.4)$$

Cette équation aux dérivées partielles ne possède pas en général de solution analytique pour toute courbe initiale  $\Gamma(0)$  et toute fonction  $F(x, y, t)$ . Ainsi, nous aurons besoin d'outils numériques. Nous aurons également besoin d'une condition initiale sur  $\phi(x, y, 0)$  étant donné  $\Gamma(t = 0)$ . Ce sujet est discuté maintenant.

### 2.2.2. Initialisation de $\phi$

Comme nous l'avons mentionné, il nous faut initialiser  $\phi(x, y, 0)$  en tout point  $(x, y)$  de notre domaine. Cependant, la seule information que nous possédons est que  $\phi(x, y, 0) = 0$  pour  $(x, y) \in \Gamma(0)$ . Il existe plusieurs stratégies pour spécifier  $\phi(x, y, 0)$ . Nous utilisons une stratégie basée sur la fonction de distance signée, c'est-à-dire  $\phi(x, y, 0) = \sigma(x, y)d((x, y), \Gamma(0))$ , où  $d$  est la distance entre le point  $(x, y)$  et la courbe  $\Gamma(0)$  et

$$\sigma(P) = \begin{cases} -1, & \text{si } (x, y) \text{ est à l'intérieur de } \Gamma(0) \text{ (zone brûlée)} \\ 0, & \text{si } (x, y) \text{ est sur } \Gamma(0) \text{ (front)} \\ 1, & \text{si } (x, y) \text{ est à l'extérieur de } \Gamma(0) \text{ (zone non-brûlée).} \end{cases} \quad (2.2.5)$$

## 2.3. RÉOLUTION NUMÉRIQUE

### 2.3.1. Maillage et notation

La résolution numérique d'une équation consiste à approcher la solution en un certain nombre de points du domaine et à des temps discrets donnés. Nous devons discrétiser le domaine spatial en rectangles congrus que l'on nomme mailles. Nous travaillons sur des domaines rectangulaires de dimension  $L_x \times L_y$ . La figure 2.3.1

illustre le maillage d'un rectangle et les différentes variables. Nous choisissons le nombre de points de discrétisation dans chacune des directions, c'est-à-dire  $N_x$  points  $x_i, i = 0, \dots, N_x - 1$ , dans la direction  $x$  et  $N_y$  points  $y_j, j = 0, \dots, N_y - 1$ , pour la direction  $y$ . Ceci nous permet de calculer les pas spatiaux  $\Delta x = L_x / (N_x - 1)$  et  $\Delta y = L_y / (N_y - 1)$  qui correspondent aux dimensions des mailles. Avec cette notation, nous avons que  $x_i = x_0 + i\Delta x$  et  $y_j = y_0 + j\Delta y$ . Dans nos simulations, nous posons généralement  $\Delta x = \Delta y$ . Nous effectuons le même travail avec le temps,  $\Delta t = T_{final} / (N_t - 1)$ . Nous notons par  $t^n$  le temps  $t = n\Delta t$ . La solution numérique de  $\phi$  au point  $(x_i, y_j)$  au temps  $t = n\Delta t$  pour  $i = 0, \dots, N_x - 1$ ,  $j = 0, \dots, N_y - 1$  et  $n = 0, \dots, N_t - 1$  est notée par  $\phi_{i,j}^{(n)} \approx \phi(x_i, y_j, t^n)$ .

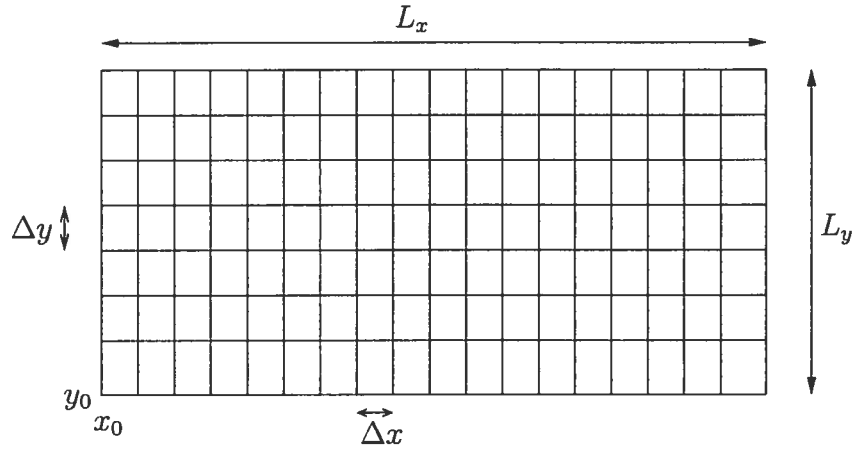


FIG. 2.3.1. Explication du maillage du domaine.

### 2.3.2. Première approche

La première idée qui nous vient en tête pour résoudre l'équation *Level-Set* est d'utiliser un schéma centré. Cependant, cette méthode est très problématique pour ce type d'équation. Regardons un exemple très simple qui illustre le problème de ce schéma. Intéressons-nous au déplacement d'une courbe définie comme une fonction,  $y = \psi(x)$ . Ainsi, nous avons que le niveau zéro de la fonction  $\phi = y - \psi(x)$  correspond à la courbe. En substituant dans l'équation *Level-Set* (2.2.4), nous obtenons l'équation simplifiée

$$\psi_t = F(1 + \psi_x^2)^{1/2}. \quad (2.3.1)$$

Il faut maintenant discrétiser cette équation. La première étape est d'approcher la dérivée temporelle par une différence avant, c'est-à-dire

$$\psi_t \approx \frac{\psi(x, t + \Delta t) - \psi(x, t)}{\Delta t}. \quad (2.3.2)$$

L'erreur commise par cette approximation est de l'ordre de  $\Delta t$ . On peut facilement retrouver ce résultat avec l'aide des séries de Taylor. Pour ce qui est de la dérivée spatiale, le plus naturel est d'utiliser une différence centrée, car l'erreur commise est de l'ordre de  $(\Delta x)^2$ . L'approximation par la différence centrée est la suivante :

$$\psi_x \approx \frac{\psi(x + \Delta x, t) - \psi(x - \Delta x, t)}{2\Delta x}. \quad (2.3.3)$$

En substituant le tout dans l'équation 2.3.1, en utilisant la notation vue plus tôt et en isolant  $\psi_i^{(n+1)}$ , nous obtenons le schéma

$$\psi_i^{(n+1)} = \psi_i^{(n)} + F\Delta t \left[ 1 + \left( \frac{\psi_{i+1}^{(n)} - \psi_{i-1}^{(n)}}{2\Delta x} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (2.3.4)$$

En connaissant  $\psi$  au temps  $t = 0$ , c'est-à-dire  $\psi_i^{(0)}$  pour tout  $i = 0, \dots, N_x - 1$ , nous pouvons trouver  $\psi_i^{(1)}$  et ainsi de suite. Par contre, il ne suffit pas d'avoir simplement une condition initiale. Numériquement, il nous est impossible de résoudre l'équation sur tout  $\mathbb{R}$ . Nous pouvons seulement trouver la solution sur une grille de dimension finie ou dans un intervalle fini dans le cas de cet exemple. Nous avons donc besoin de conditions aux bords, soit en  $x_0$  et en  $x_{N_x-1}$  ici.

Soit l'exemple où la courbe initiale est donnée par  $\psi(x, 0) = |x|$  et où la vitesse de propagation est  $F = 1$ . Pour les conditions aux bords, nous posons que la dérivée en  $x_0$  vaut  $-1$  et vaut  $1$  en  $x_{N_x-1}$ . Ceci permet de garder la forme de la fonction. La figure 2.3.2 illustre les différentes itérations. La solution attendue est connue analytiquement,  $\psi(x, t) = |x| + t$ . La solution numérique est véritablement erronée. Un problème arrive en  $x = 0$ . Ce dernier est lié à la discontinuité de la dérivée de la fonction initiale en ce point. Dans la réalité, le segment de gauche rencontre le segment de droite lors de la propagation. Avec ce schéma,

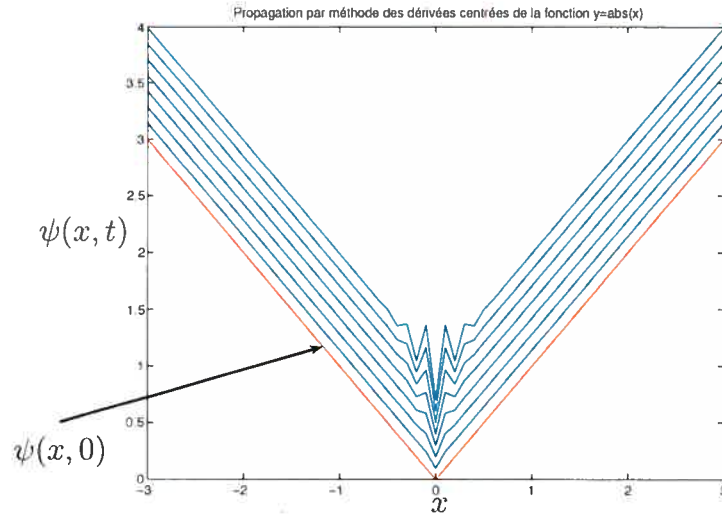


FIG. 2.3.2. Propagation de la fonction  $f(x) = |x|$  avec un schéma aux différences centrées avec  $\Delta t = 0.05$ ,  $\Delta x = 0.1$ . Le temps final est 0.7 et on voit l'évolution à toutes les deux itérations.

nous ne parvenons pas à gérer cette situation et nous obtenons les instabilités observées dans la figure 2.3.2. Ce problème est très bien connu lors de la résolution d'équations de conservation hyperboliques [8].

### 2.3.3. Schéma numérique utilisé

Nous allons présenter le principe du schéma dans le cas unidimensionnel, la généralisation au cas multidimensionnel utilise les mêmes idées. Le schéma que nous utilisons pour résoudre l'équation *Level-Set* 2.2.4 avec la condition initiale  $\phi(x, y, 0)$  est

$$\phi_{i,j}^{(n+1)} = \phi_{i,j}^{(n)} - \Delta t (\max\{F_{i,j}, 0\} \nabla^+ + \min\{F_{i,j}, 0\} \nabla^-) \quad (2.3.5a)$$

où

$$\nabla^+ = [\max\{D_{i,j}^{-x}, 0\}^2 + \min\{D_{i,j}^{+x}, 0\}^2 + \max\{D_{i,j}^{-y}, 0\}^2 + \min\{D_{i,j}^{+y}, 0\}^2]^{1/2} \quad (2.3.5b)$$

$$\nabla^- = [\min\{D_{i,j}^{-x}, 0\}^2 + \max\{D_{i,j}^{+x}, 0\}^2 + \min\{D_{i,j}^{-y}, 0\}^2 + \max\{D_{i,j}^{+y}, 0\}^2]^{1/2} \quad (2.3.5c)$$

et

$$\phi_{i,j}^{(0)} = \phi(x_i, y_i, 0). \quad (2.3.5d)$$

Notons que  $D_{i,j}^{-x}$  et  $D_{i,j}^{+x}$  représentent les différences arrière et avant de la fonction  $\phi$  par rapport à  $x$  et de manière similaire pour  $y$  :

$$D_{i,j}^{-x} = \frac{\phi_{i,j}^{(n)} - \phi_{i-1,j}^{(n)}}{\Delta x}, \quad (2.3.5e)$$

$$D_{i,j}^{+x} = \frac{\phi_{i+1,j}^{(n)} - \phi_{i,j}^{(n)}}{\Delta x}, \quad (2.3.5f)$$

$$D_{i,j}^{-y} = \frac{\phi_{i,j}^{(n)} - \phi_{i,j-1}^{(n)}}{\Delta y}, \quad (2.3.5g)$$

$$D_{i,j}^{+y} = \frac{\phi_{i,j+1}^{(n)} - \phi_{i,j}^{(n)}}{\Delta y}. \quad (2.3.5h)$$

Afin que les résultats numériques soient stables, nous devons respecter une certaine condition nommée la condition CFL. Celle-ci lie  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta t$  et  $F$  de la manière suivante :

$$\max_{\text{domaine}} |F| \Delta t \leq \min\{\Delta x, \Delta y\}. \quad (2.3.6)$$

Ainsi, si la vitesse du front est grande, nous aurons besoin d'un petit pas  $\Delta t$  afin que le schéma soit stable. Nous revenons brièvement dans la prochaine partie sur les raisons de cette condition.

#### 2.3.4. Explication du schéma

Regardons maintenant une équation plus simple afin de comprendre le principe de ce schéma. Considérons l'équation d'advection

$$\begin{cases} u_t + au_x = 0 \\ u(x, t = 0) = u_0(x) \end{cases}, \quad (2.3.7)$$

où  $a \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  et  $t \in [0, T]$ . Cette équation possède une solution analytique qui est

$$u(x, t) = u_0(x - at). \quad (2.3.8)$$

Ainsi, la solution est complètement déterminée par la condition initiale. Pour un  $x$  fixe et un temps donné, on a juste à revenir le long de la droite caractéristique, c'est-à-dire  $x_0 = x - at$ , pour retrouver la valeur de  $u$ . Donc si  $a > 0$ , la solution



est donnée par l'information provenant de la gauche, et c'est l'inverse lorsque  $a < 0$ . Ainsi, il nous faut un schéma qui préserve cette particularité. Le schéma pour l'équation d'advection est donc le suivant :

$$u_i^{(n+1)} = u_i^{(n)} - \Delta t \left( \max\{a, 0\} \frac{u_i^{(n)} - u_{i-1}^{(n)}}{\Delta x} + \min\{a, 0\} \frac{u_{i+1}^{(n)} - u_i^{(n)}}{\Delta x} \right). \quad (2.3.9)$$

La figure 2.3.3 illustre ce qui se produit dans le cas où  $a > 0$ . On y voit la droite caractéristique passant par le point  $x_i$  au temps  $t^{n+1}$  en pointillés. Puisque  $a > 0$ , l'information qui longe la caractéristique provient de la gauche. Ainsi, pour approcher la dérivée en  $x_i$  nous devons utiliser l'information de gauche, c'est-à-dire en  $x_{i-1}$ . La condition CFL nous assure que nous n'allons pas chercher de l'information à gauche de  $x_{i-1}$ . Sinon, de l'instabilité se manifeste. Le même raisonnement explique le cas où  $a < 0$ . Le seul changement est que l'information provient de la droite.

C'est la même idée qui est derrière le schéma 2.3.5. Nous pouvons réécrire l'équation 2.2.4 sous la forme

$$\phi_t + F \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \cdot \nabla \phi = 0. \quad (2.3.10)$$

Cette équation correspond à l'advection de  $\phi$  par le champ de vitesse  $F \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$ . La difficulté dans ce cas est que le sens de propagation dépend de la dérivée elle-même. L'algorithme 2.3.5 envisage toutes les combinaisons possibles et choisit celles qui sont valides au point  $(x_i, y_j)$  et au temps  $t^n$  donnés. Les différentes relations du schéma font en sorte que l'on choisit la bonne dérivée, afin que l'information arrive de la bonne direction comme dans le cas du schéma 2.3.9.

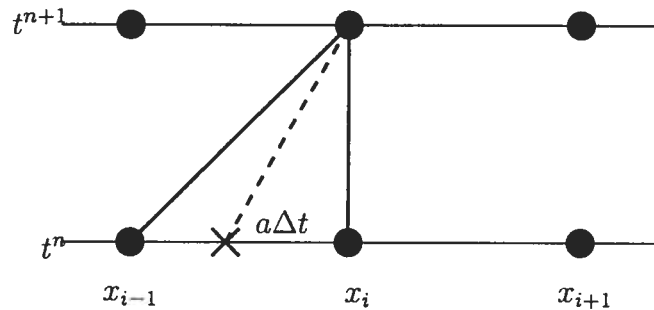
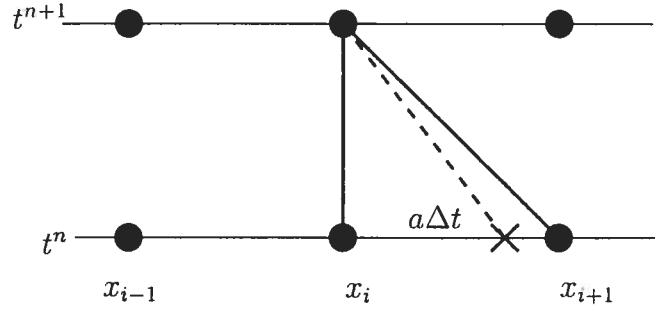


FIG. 2.3.3. Explication du schéma arrière pour le cas où  $a > 0$ .

FIG. 2.3.4. Explication du schéma avant pour le cas où  $a < 0$ .

## 2.4. EXEMPLES

### 2.4.1. Cas unidimensionnel

Revenons au cas unidimensionnel présenté plus tôt. Rappelons que nous voulons propager la fonction  $y = |x|$ . Le schéma utilisé est la version unidimensionnelle de 2.3.5, soit

$$\phi_i^{(n+1)} = \phi_i^{(n)} + \Delta t (\max\{F_i, 0\} \nabla^+ + \min\{F_i, 0\} \nabla^-) \quad (2.4.1a)$$

où

$$\nabla^+ = (\min\{D_i^{-x}, 0\}^2 + \max\{D_i^{+x}, 0\}^2 + 1)^{1/2} \quad (2.4.1b)$$

$$\nabla^- = (\max\{D_i^{-x}, 0\}^2 + \min\{D_i^{+x}, 0\}^2 + 1)^{1/2}. \quad (2.4.1c)$$

La figure 2.4.1 illustre les résultats. Nous obtenons bien le comportement attendu, qui est une bonne approximation de  $\psi(x, t) = |x| + t$ . Les informations provenant des deux côtés se rencontrent et malgré la discontinuité dans la pente, le schéma est robuste.

### 2.4.2. Propagation bidimensionnelle de coins

Il s'agit maintenant de propager une courbe qui possède initialement la forme d'un carré. La difficulté est, comme dans le cas précédent, au niveau des discontinuités dans les dérivées de la courbe. Nous allons considérer deux cas. Le premier est lorsque la vitesse est orientée vers l'extérieur du carré. Dans ce cas, il y a une zone de raréfaction au niveau des coins. Ce phénomène est observé dans l'étude des équations hyperboliques. Il survient lorsque les courbes caractéristiques divergent. Dans, notre cas, il en résulte que les coins du carré s'arrondissent. Pour le

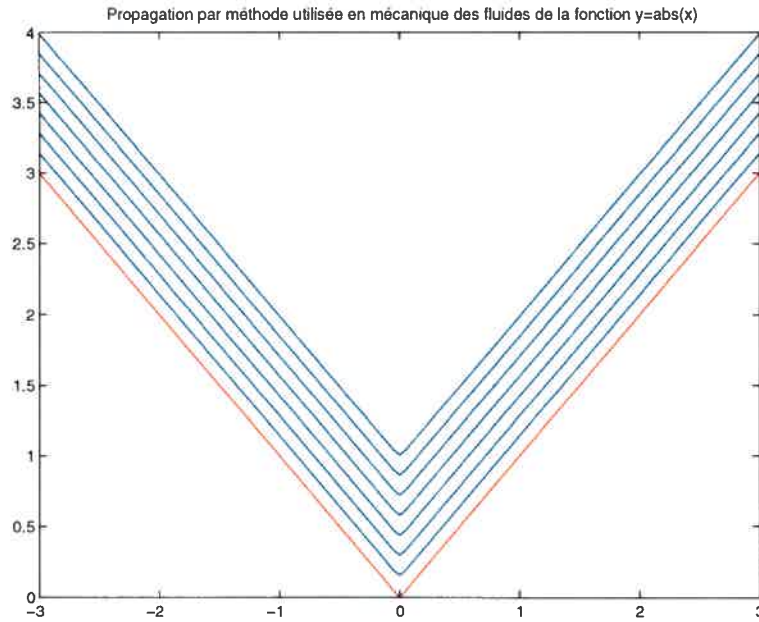


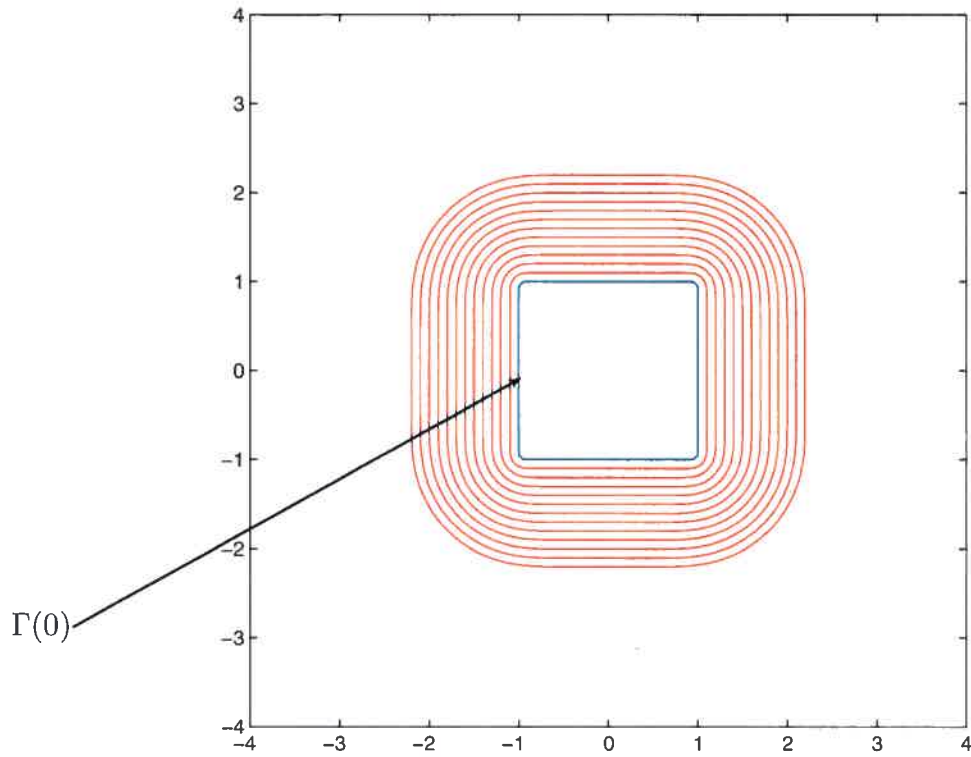
FIG. 2.4.1. Propagation de la fonction  $f(x) = |x|$  avec le schéma 2.4.1 avec  $\Delta t = 0.05$ ,  $\Delta x = 0.05$ . Le temps final est 0.7 et on voit l'évolution à toutes les deux itérations.

deuxième cas, la vitesse est vers l'intérieur du carré, ce qui entraîne une rencontre des segments comme dans l'exemple unidimensionnel. En regardant les résultats des figures 2.4.2, nous voyons que la performance de l'algorithme est concluante. Dans la figure 2.4.2 (b), il est à noter que les courbes ne semblent pas être des carrés, mais le problème est causé par la fonction *contour* de *Matlab* qui dessine les courbes de niveau. Nous avons vérifié et le point manquant dans les coins est effectivement sur le niveau zéro, mais il n'apparaît pas sur les figures.

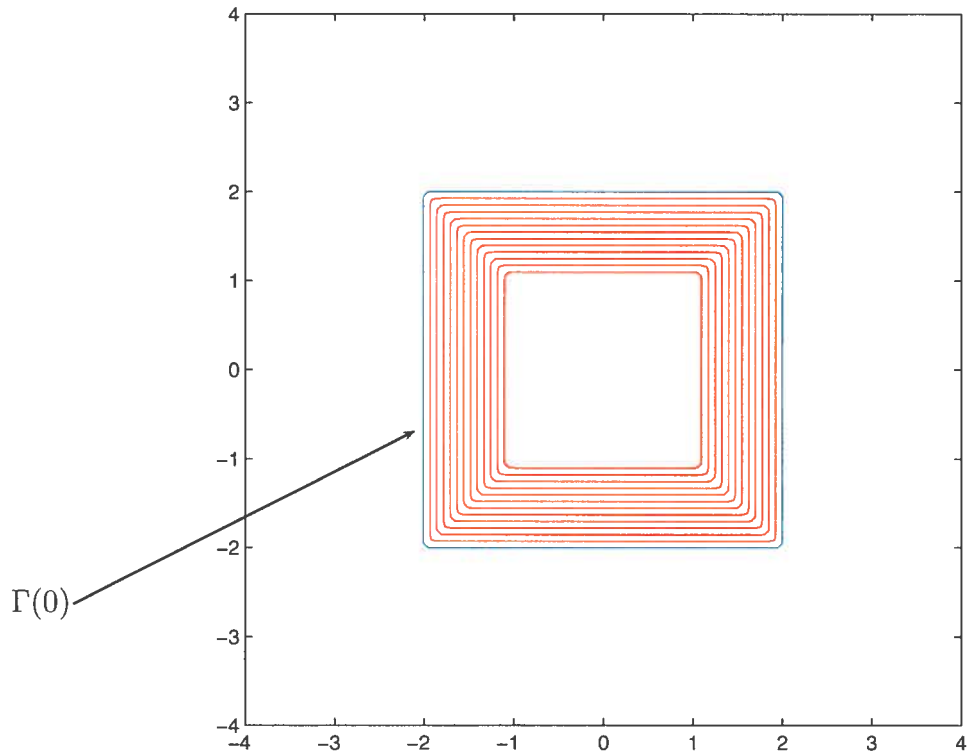
### 2.4.3. Fusion de courbes

L'exemple qui suit montre deux cercles qui évoluent simultanément dans le même plan. Un peu comme deux feux qui fusionnent, nous nous attendons à ce que les cercles deviennent une seule courbe lorsqu'ils se toucheront. Un tel changement de topologie est très problématique avec la méthode des marqueurs. Nous observons que la méthode *Level-Set* fonctionne très bien dans ce cas. Il est intéressant de voir que lors de la fusion des deux cercles, il y a formation d'une discontinuité dans la dérivée de la courbe, mais comme nous l'avons déjà

vu, la méthode est robuste, même dans ce type de situation. Il ne reste plus qu'à obtenir un modèle fiable pour la vitesse de propagation  $F$ . Les prochains chapitres discutent de ce sujet.



(a) Propagation d'un carré avec vitesse vers l'extérieur.



(b) Propagation d'un carré avec vitesse vers l'intérieur.

FIG. 2.4.2. Propagation d'un carré,  $\Delta t = 0.05$ ,  $\Delta x = 0.05$ .

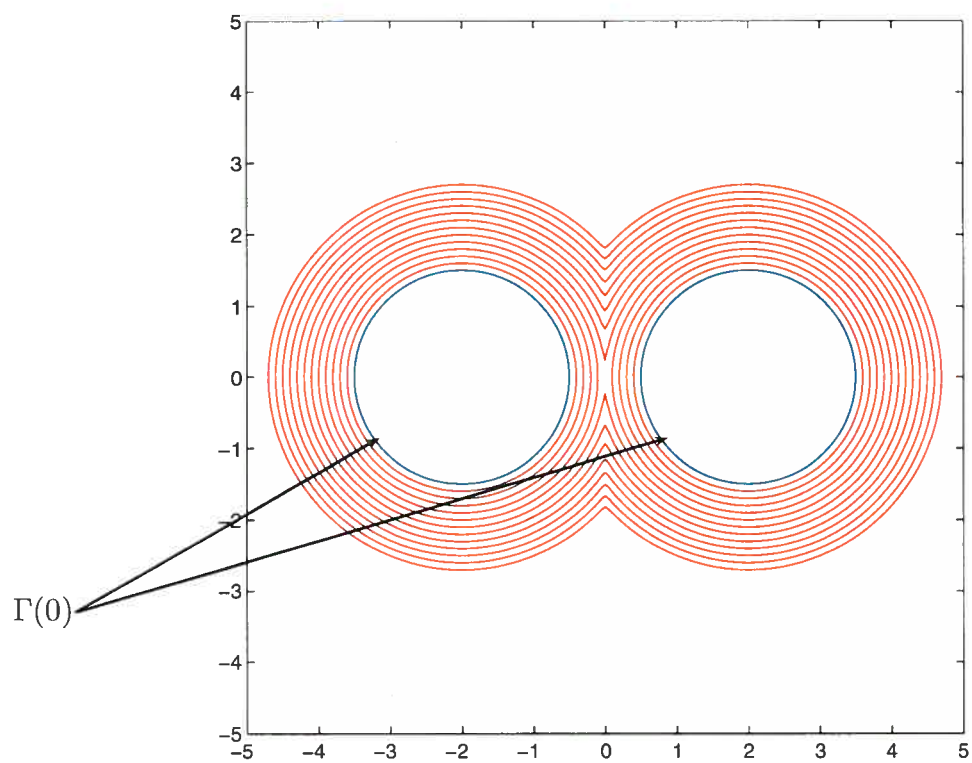


FIG. 2.4.3. Fusion de deux cercles qui se propagent dans le plan.

## Chapitre 3

---

### LE MODÈLE DE ROTHERMEL

Dans ce chapitre, nous survolons brièvement le modèle de Rothermel (1972) [5]. Nous expliquons ses hypothèses théoriques ainsi que les conditions dans lesquelles les expérimentations ont été effectuées. Par la suite, nous regardons quelques simulations réalisées avec la méthode *Level-Set* où la vitesse de propagation est donnée par ce modèle.

#### 3.1. OBTENTION DU MODÈLE

Le modèle de Rothermel repose sur l'hypothèse que le flux de chaleur requis pour la propagation du front ( $I_p$ ) obéit à l'équation

$$I_p = F \rho_p \varepsilon Q_{ig}. \quad (3.1.1)$$

Ici,  $F$  est la vitesse du front et  $\rho_p \varepsilon Q_{ig}$  est un terme quantifiant la chaleur de pré-inflammation.  $\rho_p$  est la densité d'une particule végétale,  $\varepsilon$  est un coefficient de chauffage effectif et  $Q_{ig}$  est la chaleur de préchauffage. Dans le modèle, le produit de ces trois termes est déterminé de manière empirique. Le modèle repose également sur l'hypothèse que le flux  $I_p$  est une fraction de l'intensité de la chaleur libérée par la réaction  $I_R$ , c'est-à-dire

$$I_p = \xi I_R. \quad (3.1.2)$$

Une fois de plus, on trouve  $I_R$  de manière empirique. En combinant les équations 3.1.1 et 3.1.2 et en isolant la vitesse, on obtient

$$F = \frac{\xi I_R}{\rho_p \varepsilon Q_{ig}}. \quad (3.1.3)$$

On remarque que cette forme d'équation pour la vitesse correspond à la forme donnée par l'équation 1.4.1. C'est donc le postulat principal dans l'obtention du modèle de Rothermel ([5],[6]). D'autres hypothèses sont ajoutées. En voici la liste :

- La fraction de chaleur transmise au combustible  $\xi$  est seulement fonction de  $\sigma$  (le rapport surface/volume de la particule végétale) et de la compacité  $\beta$ . Cette compacité est le rapport entre le volume occupé par le combustible et le volume total disponible.
- $I_R$  est une fonction linéaire de la charge de végétation  $w_0$ .
- Toutes les particules végétales ont la même dimension. Cela a pour conséquence que le taux de réaction optimal est une fonction de la compacité seulement.

Il reste à exprimer la dépendance des quantités dans les équations 3.1.1 et 3.1.2 en fonction des données physiques décrivant les circonstances du feu. Ces dernières sont au nombre de onze et sont décrites dans l'annexe A, avec le détail des relations empiriques nécessaires au calcul de la vitesse  $F$ .

Un point important à se rappeler lorsque l'on utilise ce modèle est son domaine de validité. Comme mentionné précédemment, les coefficients ont été calibrés grâce à des expériences. Il faut donc avoir en tête que, a priori, les simulations seront valides seulement pour des données proches de celles utilisées lors des expériences.

### 3.2. PROBLÈMES LIÉS À LA PENTE ET AU VENT

Pour inclure les facteurs vent et pente, il faut utiliser une version plus générale de la formule 3.1.3 proposée par Rothermel, qui s'écrit :

$$F = \frac{I_R \xi (1 + \phi_W + \phi_S)}{\rho_b \epsilon Q_{ig}}. \quad (3.2.1)$$

La définition des paramètres se trouve dans l'annexe A. La pente et le vent interviennent respectivement dans les quantités  $\phi_S$  et  $\phi_W$  :

$$\phi_W = C(0.305U)^B \left( \frac{\beta}{\beta_{op}} \right)^{-E}, \quad (3.2.2)$$



$$\phi_S = 5.275\beta^{-0.3}(\tan \theta)^2. \quad (3.2.3)$$

Ici,  $U$  est la vitesse du vent à mi-flamme dans la direction normale au front et  $\theta$  est l'angle d'élévation. En examinant attentivement les deux expressions, on aperçoit quelques problèmes.

### 3.2.1. Problèmes liés à la pente et amélioration du modèle par McArthur

L'expérimentation faite par Rothermel pour déterminer l'influence de la pente a été effectuée seulement pour des feux qui montent un plan. Le modèle est donc valide seulement pour des feux sur des terrains où l'angle d'élévation est positif. Si on suppose que la formule est valide pour tous les angles, on obtient des absurdités dans l'expression de  $\phi_S$ , car l'influence de l'angle d'élévation  $\theta$  est sous la forme de  $\tan^2 \theta$ . Ainsi, que l'angle soit positif ou négatif ne change rien à la contribution de la pente. Ceci est erroné, un feu descend moins rapidement qu'il ne monte. McArthur [16] a proposé une façon de résoudre ce problème en changeant l'expression pour la vitesse de la manière suivante :

$$F = \frac{I_R \xi (1 + \phi_W)}{\rho_b \varepsilon Q_{ig}} e^{\frac{6.3}{\pi} \theta}, \quad (3.2.4)$$

où  $\theta$  est l'angle d'élévation,  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ .

### 3.2.2. Simulations sur des plans inclinés

Regardons ici l'effet que produit la pente sur un front initialement circulaire. Pour ce faire, nous supposons que la végétation est uniforme et qu'il n'y a pas de vent ( $\phi_W = 0$ ). Les données physiques utilisées sont celles fournies par Margerit [10] et sont présentées dans la table 3.2.1. Il est à noter qu'ici  $\sigma$  est donné en  $m^{-1}$ , mais qu'il est converti en  $cm^{-1}$  pour le calcul de la vitesse. Le front se propage

$\sigma = 8130m^{-1}$	$\delta = 1m$	$H = 17550kJ/kg$
$C_0 = 4kg/m^2$	$\rho_p = 466kg/m^3$	$M_f = 0.007$
$S_T = 0.00347$	$S_E = 0.00322$	$M_x = 0.15$

TAB. 3.2.1. Jeux de données #2.

sur un plan incliné et sa projection sur le plan  $xy$  est initialement circulaire. Nous comparons les résultats obtenus avec trois angles d'élévation : 0 (correspondant à un terrain horizontal),  $\pi/16$  et  $\pi/4$ . Le temps total couvert par les simulations est de 1h30. Les figures 3.2.1, 3.2.2 et 3.2.3 illustrent la position du front à chaque 15 minutes. Les axes sont en mètre. Les simulations ont été effectuées avec un pas spatial de  $\Delta x = \Delta y = 5m$  et un pas de temps de  $\Delta t = 0.2$  minutes. Nous avons également placé la position finale (à  $t = 90$  minutes) du front dans le cas où il n'y a pas de pente pour des fins de comparaison. Dans la réalité lorsqu'un front

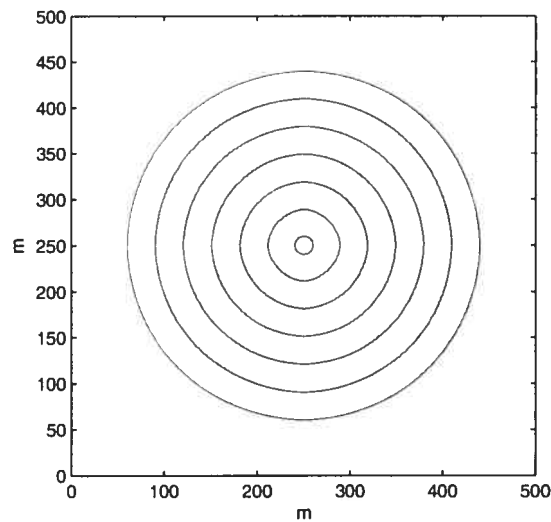


FIG. 3.2.1. Évolution du front sur un terrain plat avec une végétation uniforme. Le front est illustré à toutes les 15 minutes.

est initialement circulaire, il prend une forme oblongue lors de la présence d'une pente. Plus l'angle d'élévation est grand, plus l'ellipse s'allonge dans la direction de la plus grande pente et moins il se déplace dans la direction opposée. S'il n'y a pas de pente, il reste circulaire. C'est le phénomène que nous obtenons dans les figures 3.2.1, 3.2.2 et 3.2.3. Il est à noter que les courbes dans les figures 3.2.2 et 3.2.3 ne semblent pas être tout à fait des ellipses. Ceci se fait plus visible lorsque l'angle d'élévation devient plus grand. Ce comportement s'explique par la forme de l'expression décrivant la pente. Lorsque celle-ci est très élevée, la vitesse est quasi nulle dans la direction opposée à la plus grande pente. Sur les flancs, la vitesse du front est la même que celle lorsqu'il n'y a pas de pente. Les cercles

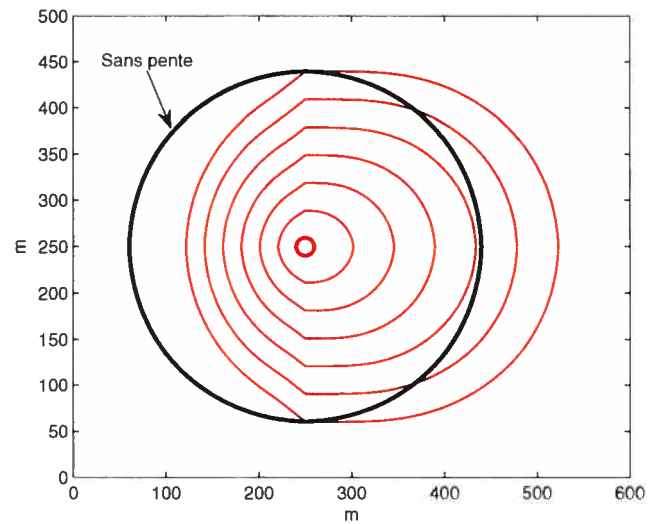


FIG. 3.2.2. Évolution du front sur une pente ayant une élévation de  $\pi/16$ . Le front est illustré à toutes les 15 minutes.

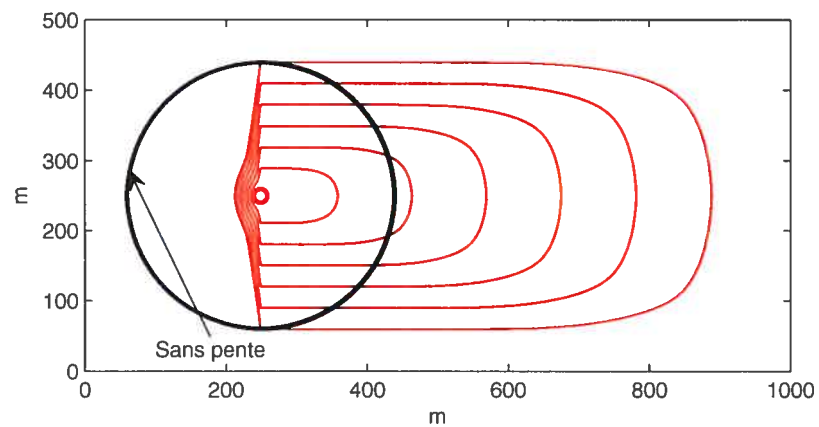


FIG. 3.2.3. Évolution du front sur une pente ayant une élévation de  $\pi/4$ . Le front est illustré à toutes les 15 minutes.

montrant la position finale du front lorsqu'il n'y a pas de pente le démontrent bien. Ce type de comportement est observé dans la réalité (voir [7]).

### 3.2.3. Problème du vent

La solution n'est pas aussi simple pour le facteur vent. Dans la relation 3.2.2,  $U$  est la norme de la vitesse du vent à mi-flamme. Ainsi,  $\phi_w$  n'a qu'une contribution positive sur la vitesse du front. Cela ne correspond pas à la réalité, car le front peut se propager dans la direction contraire aux vents. Il avance moins vite, mais il avance tout de même. Nous n'avons pas réussi à trouver dans la littérature une solution à ce problème. Nous savons qu'elle existe, car plusieurs modèles comme le FARSITE et le BEHAVE sont fondés sur celui de Rothermel et ils prennent en considération le vent. Par contre, ils ont tous les contraintes du domaine de validité au niveau de la vitesse de vents.

## 3.3. RESTRICTIONS DU MODÈLE DE ROTHERMEL

Comme nous avons pu le constater, le modèle original de Rothermel possède quelques faiblesses. La contribution de la pente a pu être corrigée grâce à l'ajout de McArthur, mais ce n'est pas le cas pour le vent. De plus, le modèle n'est valide seulement que pour un domaine restreint de paramètres. Il prédit seulement la vitesse pour de la végétation verticalement homogène. Cela n'est pas le cas pour une forêt. De plus, il faut que l'intensité des flammes soit faible, sinon nous sortons complètement du domaine de validité. Ce sont les principales raisons qui nous poussent à regarder d'autres modèles. Cependant, ne perdons pas de vue ce modèle pour des fins de comparaison avec les autres pour des jeux de données où le modèle de Rothermel a fait ses preuves.

## Chapitre 4

---

### MODÈLE DE JONATHAN MARGERIT

Portons ici notre attention sur le modèle multiéchelle de Jonathan Margerit. Ce modèle est décrit dans sa thèse de doctorat [10] et est repris dans deux articles [11], [12]. Le choix de ce modèle provient essentiellement du fait qu'il prend en considération les différents phénomènes physiques se produisant à diverses échelles. Cela permet, par la suite, de bien incorporer le facteur vent par exemple. L'influence de ce dernier n'est pas bien cernée par les modèles de l'industrie. Il est à noter que durant tout ce chapitre, nous rapportons ce qu'il a élaboré. Il faut également spécifier que ce chapitre n'est pas essentiel à la compréhension du reste de ce mémoire. Il a pour but de décrire la manière dont le modèle est construit afin de revoir certains aspects de cette construction dans le futur. Par contre, nous suggérons fortement de lire la section 4.1, qui donne une idée générale de la construction et des échelles étudiées ainsi que la section 4.5 qui fournit les équations que nous utiliserons par la suite.

Le modèle de Margerit est un modèle dit théorique. Il n'est pas basé sur des observations de feux ou de simulations en laboratoire, mais plutôt sur les lois de la mécanique des fluides, les principes de thermodynamique et les bilans de réactions chimiques. Un système d'équations aux dérivées partielles en est déduit. Pour arriver à ces équations de propagation du front, il faut tout d'abord regarder ce qui se passe aux différentes échelles spatiales.

## 4.1. LES ÉCHELLES

La force de ce modèle réside dans le fait qu'il prend en considération tous les phénomènes se produisant aux différentes échelles : gigascopique, macroscopique, mésoscopique et microscopique.

### 4.1.1. Échelle gigascopique

Il y a tout d'abord l'échelle dite gigascopique, la plus grande, qui englobe tout le domaine de propagation du front de flammes. Ce front y est représenté par une courbe qui se propage sur une surface (la couverture végétale). À cette échelle, on a donc une vision bidimensionnelle du feu. Pour arriver à cette échelle, on émet l'hypothèse, qui sera à la base de la réduction du modèle tridimensionnel à un modèle bidimensionnel, que  $h/L_f \ll 1$ , où  $h$  est la hauteur de la zone de contribution des phénomènes influençant la propagation et  $L_f$  la longueur caractéristique de l'échelle gigascopique (100m à des km). Cette hypothèse entraîne la perte de la modélisation de la propagation verticale du feu. Dans des cas exceptionnels,  $h$  peut atteindre quelques kilomètres, pour des feux de très grande intensité. Le modèle est donc valide en théorie dans les cas où les feux possèdent une intensité modérée. Dans le cas contraire, les effets des mouvements de convection de la chaleur et de la fumée ne sont pas à négliger et la réduction dimensionnelle serait questionnable. On supposera également que la hauteur des flammes  $h_f$  est du même ordre de grandeur que celle de la végétation. Finalement, on notera par  $d$  la densité de végétation vue à cette échelle, c'est-à-dire le rapport de la surface de la couverture de végétation sur la surface totale du domaine.

### 4.1.2. Échelle macroscopique

L'échelle macroscopique est constituée de trois strates verticales : le sol, la végétation et l'air, notées respectivement  $\underline{\Omega}$ ,  $\Omega$  et  $\overline{\Omega}$ . La strate de la végétation pourrait être divisée en sous-strates : herbes, arbustes, troncs et feuillages, mais pour simplifier, le modèle de Margerit ne considère qu'une seule strate. On note par  $\underline{\Sigma}$  la frontière sol-végétation et par  $\overline{\Sigma}$  celle de l'air-végétation. La grandeur caractéristique de l'échelle macroscopique est de quelques mètres. Cette échelle

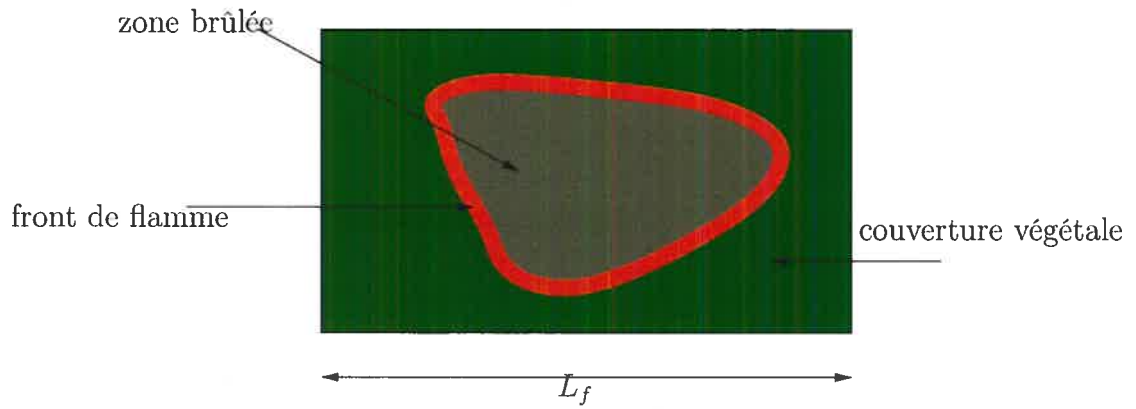


FIG. 4.1.1. Vue gigascopique.

correspond également à celle utilisée dans le modèle de Rothermel. Les mécanismes de propagation de la chaleur sont propres à chacune de ses strates et sont donc traités séparément. On relie, par la suite, les trois strates en ajoutant des conditions limites sur  $\underline{\Sigma}$  et  $\overline{\Sigma}$ . Tous les phénomènes se produisant à cette échelle sont détaillés dans les prochaines sections. Pour la strate végétale, il est très important de noter qu'elle est divisée à cette échelle en deux phases homogènes : la phase particules végétales et la phase de l'air. Le mélange des deux phases forme un milieu considéré comme continu. La quantité importante à connaître à cette échelle est ce que l'on appelle la porosité de la strate végétale. La porosité  $\Phi$  est définie de la manière suivante :  $\Phi = 1 - \beta$ , où  $\beta$  est la compacité de la phase particule végétale, c'est-à-dire le rapport du volume occupé par la phase particule végétale sur le volume de la strate végétale. Donc,  $\Phi$  représente le rapport du volume de la phase air sur le volume de la strate végétale.

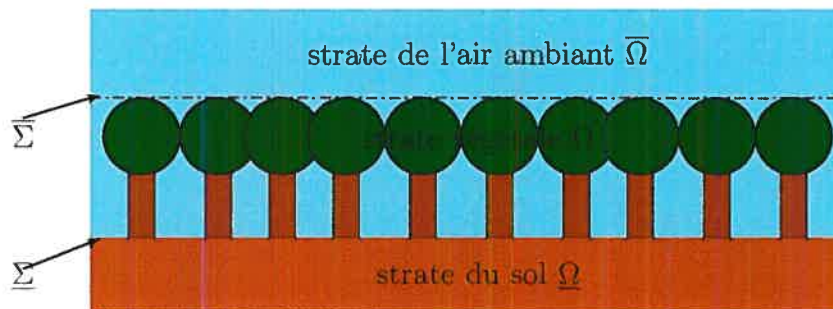


FIG. 4.1.2. Vue macroscopique.

### 4.1.3. Échelle mésoscopique

L'échelle mésoscopique est la dimension où l'on ne considère plus la strate végétale comme étant un milieu continu, mais plutôt comme un milieu diphasique. On dissocie la strate végétale en sa phase poreuse (les constituants végétaux) et sa phase gazeuse (l'air). L'échelle de grandeur caractéristique est de quelques décimètres.

Un des paramètres qui est fourni à cette échelle est le rapport surface/volume d'une particule de combustible. Ce rapport sera noté  $\sigma$ . Il joue un rôle important dans la variation de la température et de la teneur en eau des particules lors de la combustion. La vitesse de propagation du front dépend fortement de ce paramètre.

### 4.1.4. Échelle microscopique

L'échelle microscopique est celle où l'on peut distinguer les différentes phases de la matière au niveau de la phase poreuse. En connaissant les réactions chimiques en présence à ce niveau, on sera en mesure de produire des bilans d'énergie, de quantité de mouvement et de masse, ce qui permettra d'écrire les équations mésoscopiques modélisant les phénomènes en présence. Ces équations sont le résultat d'une opération d'homogénéisation de l'échelle microscopique. Cette étape n'est pas décrite dans le travail de Margerit. Il passe directement aux équations de l'échelle mésoscopique. Il est à noter que cette échelle microscopique ne correspond pas à celle que nous avons l'habitude d'étudier, c'est-à-dire l'échelle moléculaire. Ici, elle est plus grande, de l'ordre de quelques centimètres.

### 4.1.5. Synthèse

Le diagramme 4.1.3 et le tableau 4.1.1 résument les caractéristiques des différentes échelles.



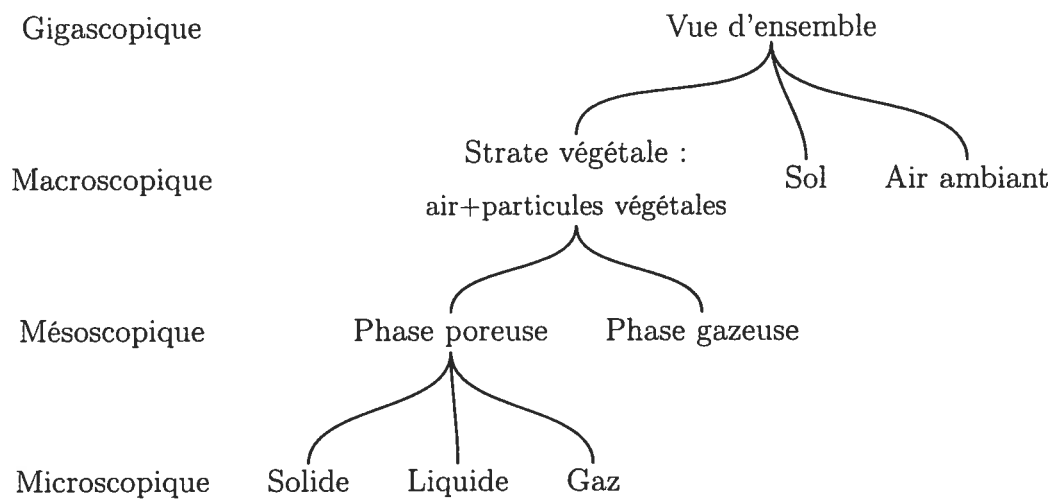


FIG. 4.1.3. Diagramme des différents focus.

Échelles	Longueur	Hauteur	Vision	Type d'équation	Spécifications
gigascopique	$10^2$ – $10^4 m$	$3 - 10m$	2D	système d'EDO (Température, humidité, charge) par rapport au temps	courbe 1D, densité de végétation $d$
macroscopique	$10 - 20m$	$3 - 10m$	3D	Navier-Stokes par homogénéisation	trois strates visibles, milieu continu, porosité $\Phi$
mésoscopique	$10^{-1} - 1m$	$10^{-1} - 1m$	3D	Navier-Stokes, Loi de Darcy	séparation en phase végétale et air, calcul de $\varepsilon^p$
microscopique	$10^{-3}$ – $10^{-2}m$	$10^{-3}$ – $10^{-2}m$	3D	équations des milieux continus, couplage solide-fluide	structure interne détaillée des végétaux

TAB. 4.1.1. Tableau des différentes échelles et ce qu'il y a à retenir selon le modèle de Margerit [10].

Le diagramme 4.1.3 montre les différents constituants des différentes échelles et le tableau 4.1.1 résume les principales informations de ces échelles. Les étapes pour arriver aux équations de l'échelle gigascopique (l'échelle qui intéresse Margerit) sont les suivantes :

- (1) Obtention des équations macroscopiques des strates de l'air ambiant et du sol grâce aux équations de Navier-Stokes et des équations de transfert de chaleur.
- (2) Énumération des équations à l'échelle mésoscopique de la strate végétale. On pourrait les dériver de l'échelle microscopique, mais ce n'est pas fait dans [10].
- (3) Obtention des équations à l'échelle macroscopique de la strate végétale par homogénéisation des équations mésoscopiques.
- (4) Obtention des conditions aux frontières des strates.
- (5) Fermeture du système avec les lois des processus irréversibles.
- (6) Réduction dimensionnelle des équations de l'échelle macroscopique.
- (7) Modélisation du flux radiatif.

Les prochaines sections porteront sur la description de ces étapes.

## 4.2. ÉQUATIONS MACROSCOPIQUES DES STRATES DE L'AIR AMBIANT ET DU SOL

Regardons ici, la première étape, c'est-à-dire la modélisation à l'échelle macroscopique des strates de l'air ambiant et du sol.

### 4.2.1. Équations macroscopiques de la strate de l'air ambiant

Dans la strate de l'air ambiant, on peut séparer les constituants chimiques en cinq groupes selon leur rôle dans les mécanismes de combustion. On a l'oxygène  $O_2$ , les gaz inertes (dont en majorité l'azote  $N_2$ ), le fuel produit par la pyrolyse  $F$ , la vapeur d'eau  $(H_2O)_v$ , les produits de combustion  $P$ . Avant d'entrer dans les détails, définissons quelques quantités qui reviendront dans les équations. Il est à

noter que la barre au-dessus des variables signifie que ces dernières appartiennent au domaine  $\bar{\Omega}$  qui définit la strate de l'air ambiant.

- $\bar{\rho}_i$  est la masse volumique de l'espèce  $i$ ,
- $\bar{W}_i$  est la masse molaire de l'espèce  $i$ ,
- $\bar{\rho} = \sum_i \bar{\rho}_i$  est la densité totale,
- $\bar{Y}_i = \frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}}$  est la densité massique de l'espèce  $i$ ,
- $\dot{\bar{\omega}}_i$  est le taux de production de l'espèce  $i$ .

Ici,  $i = O_2, F, N_2, (H_2O)_v, P$ . Dans cette strate, on a une seule réaction qui est une réaction d'oxydation :



$\nu_F$ ,  $\nu_{O_2}$  et  $\nu_P$  sont les coefficients stoechiométriques de la réaction et  $\bar{\kappa}$  est une constante spécifique à la réaction. Les équations décrivant les bilans d'énergie, de masse et de quantité de mouvement sont données par les équations de Navier-Stokes pour les gaz parfaits. On a donc le système suivant :

- **Bilan de masse de l'espèce  $i$**

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{Y}_i) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{Y}_i \bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{J}}_i) = \dot{\bar{\omega}}_i \quad (4.2.2)$$

- **Bilan de quantité de mouvement**

$$\bar{\rho} \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{V}} \right) - \nabla \cdot (\bar{\mathcal{T}}) = -\nabla \bar{P} + \bar{\rho} \mathbf{g} \quad (4.2.3)$$

- **Bilan d'énergie interne total**

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \bar{\rho} \left( \bar{E} + \frac{1}{2} |\bar{\mathbf{V}}|^2 \right) \right] + \\ & \nabla \cdot \left[ \bar{\rho} \left( \bar{E} + \frac{1}{2} |\bar{\mathbf{V}}|^2 \right) \bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{V}} \cdot \bar{\mathcal{C}} \right] = \bar{\rho} \mathbf{g} \cdot \bar{\mathbf{V}}. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Ici,  $\bar{\mathbf{V}}$  est la vitesse barycentrique, donnée par

$$\bar{\mathbf{V}} = \sum_i \bar{Y}_i \bar{\mathbf{v}}_i. \quad (4.2.5)$$

$\bar{P}$  est la pression,  $\bar{E}$  est l'énergie interne et  $\bar{\mathbf{v}}_i$  la vitesse de l'espèce  $i$ . On a également les relations suivantes :

$$\sum_i \bar{Y}_i = 1 \quad \text{et} \quad \sum_i \bar{\mathbf{J}}_i = 0 \quad (4.2.6)$$

où  $\bar{\mathbf{J}}_i = \bar{\rho} \bar{Y}_i (\bar{\mathbf{V}} - \bar{\mathbf{v}}_i)$  est un flux. Puisque le fluide est Newtonien, le tenseur de contraintes  $\bar{\mathcal{C}}$  doit avoir la forme  $\bar{\mathcal{C}} = -\bar{P}\mathcal{I} + \bar{\mathcal{T}}$ , où  $\mathcal{I}$  est le tenseur identité et  $\bar{\mathcal{T}}$  est le tenseur déviateur. On sait aussi que la forme usuelle du tenseur de contraintes pour ce type de fluide est

$$\bar{\mathcal{C}} = -\left(\bar{P} + \frac{2}{3}\bar{\mu}\nabla \cdot \bar{\mathbf{V}}\right)\mathcal{I} + 2\bar{\mu}\bar{\mathcal{D}}, \quad (4.2.7)$$

où  $\bar{\mu}$  est la viscosité dynamique et

$$\bar{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}(\nabla \bar{\mathbf{V}} + \nabla^T \bar{\mathbf{V}}).$$

$\bar{Q}$  est le flux de chaleur et il est donné par l'équation :

$$\bar{Q} = -\bar{\lambda}\nabla \bar{T} + \bar{\rho} \sum_i \bar{H}_i \bar{Y}_i \bar{\mathbf{j}}_i + \bar{Q}_r \quad (4.2.8)$$

où  $\bar{\lambda}$  est la conductivité thermique,  $\bar{H}_i(\bar{T})$  est l'enthalpie de l'espèce  $i$  et  $\bar{Q}_r$  est le flux radiatif. On fait l'hypothèse qu'il est nul dans l'air ambiant. Les flux de diffusion  $\bar{\mathbf{j}}_i$  sont donnés par la loi de Fick :

$$\bar{Y}_i \bar{\mathbf{j}}_i = -\bar{D}_i \nabla \bar{Y}_i, \quad (4.2.9)$$

où les  $\bar{D}_i$  sont les coefficients de diffusion. On a également l'équation d'état (loi des gaz parfaits)

$$\bar{P} = R^0 \bar{T} \sum_i \bar{Y}_i / \bar{W}_i \quad (4.2.10)$$

et l'équation d'état calorique

$$\bar{H}_i(\bar{T}) = \bar{H}_i^0 + \int_{T^0}^{\bar{T}} C_{P,i} dT. \quad (4.2.11)$$

$\bar{H}_i^0$  est l'enthalpie de formation de l'espèce  $i$  à la température de référence  $T^0$  et  $C_{P,i}$  est la capacité calorifique à la pression constante  $P$  de l'espèce  $i$ . On peut alors définir l'enthalpie massique  $\bar{H}$  qui s'écrit  $\bar{H} = \sum_i \bar{H}_i \bar{Y}_i$ . Ceci permet de trouver  $\bar{E} = \bar{H} - \bar{P}/\bar{\rho}$ .

#### 4.2.2. Équations macroscopiques de la strate du sol

Contrairement à la strate de l'air ambiant, la strate du sol comprend beaucoup moins d'équation. Premièrement, il n'y a pas de combustion dans cette strate. Le seul phénomène présent est de la conduction thermique. Elle est très faible, mais on la prend en considération. L'équation est

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{\mathbf{Q}} = 0, \quad (4.2.12)$$

où  $\underline{\mathbf{Q}} = -\underline{\lambda} \nabla T$  et  $E = C_p T + E_0$ . Ici,  $\underline{\lambda}$  est la conductivité thermique du sol,  $T$  est la température,  $\underline{\mathbf{Q}}$  est le flux de chaleur,  $C_p$  est la capacité thermique,  $E_0$  et  $E$  sont respectivement l'énergie à température ambiante et l'énergie contenue dans le sol et  $\rho$  est la densité du sol.

### 4.3. ÉQUATIONS MACROSCOPIQUE DE LA STRATE VÉGÉTALE

Le but de cette section est d'obtenir les équations à l'échelle macroscopique de la strate végétale. Ceci n'est pas aussi simple que pour les deux autres strates, car plusieurs phénomènes ont lieu aux plus petites échelles. On se sert des équations à l'échelle mésoscopique comme point de départ. Il est important de mentionner que ces équations proviennent de l'échelle microscopique et qu'elles ne sont pas dérivées dans le travail de Margerit, mais simplement prises pour acquies.

#### 4.3.1. Équations mésoscopiques

Comme on l'a mentionné plus tôt, la phase particule végétale se divise en deux phases au niveau mésoscopique : la phase gazeuse et la phase poreuse.

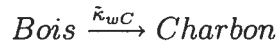
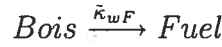
##### 4.3.1.1. Équations de la phase gazeuse

La phase de l'air est décrite par les mêmes phénomènes que la strate de l'air ambiant, équations 4.2.2 à 4.2.11. Les variables de cette phase sont indexées par  $f$  (pour fluide) au lieu d'être surlignées.

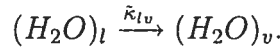
#### 4.3.1.2. Équations de la phase poreuse (végétale)

Regardons ce qui se passe dans la phase végétale dont les variables seront indexées par  $p$ . C'est un milieu poreux possédant les trois phases de la matière : solide ( $s$ ), liquide ( $l$ ), gazeux ( $g$ ). Il y a deux constituants solides : le bois noté par  $w$  et le charbon  $c$ ; trois gaz : le combustible (fuel)  $F$  (surtout du  $CH_4$ ), le goudron  $G$  et la vapeur d'eau  $(H_2O)_v$  (indexée par  $v$ ); et un liquide :  $(H_2O)_l$  (indexé par  $l$ ). Les réactions chimiques associées à cette phase sont la pyrolyse et l'évaporation de l'eau :

##### – Pyrolyse



##### – Évaporation



Celles-ci ont été considérées dans l'homogénéisation de l'échelle microscopique. Notons par  $V_{w_p}$ ,  $V_{c_p}$ ,  $V_{g_p}$  et  $V_{l_p}$  les volumes respectifs occupés par les espèces de la phase végétale i.e, le bois, le charbon, les gaz et les liquides. On peut ainsi calculer le volume occupé par la matière solide,  $V_{s_p} = V_{c_p} + V_{w_p}$  et celui occupé par le fluide  $V_{f_p} = V_{g_p} + V_{l_p}$ . Définissons la porosité de la phase végétale  $\varepsilon^p = V_{f_p}/V_p$  où  $V_p$  est le volume total de la phase végétale. De manière similaire, on calcule ce que l'on appellera les saturations,  $Sa_{c_p} = V_{c_p}/V_{s_p}$  (saturation du charbon),  $Sa_{w_p} = V_{w_p}/V_{s_p}$  (saturation du bois),  $Sa_{g_p} = V_{g_p}/V_{f_p}$  et  $Sa_{l_p} = V_{l_p}/V_{f_p}$ .

#### Bilan de masse

On est maintenant en mesure de donner les équations de bilan de masse pour les constituants de la phase solide. Ainsi, le bilan de masse du bois est donné par :

$$\frac{\partial}{\partial t} ((1 - \varepsilon^p) Sa_{w_p} \rho_{w_p}) = -\kappa_{w_p F g_p} - \kappa_{w_p c_p} \quad (4.3.1)$$

et le bilan de masse pour le charbon est donné par :

$$\frac{\partial}{\partial t} ((1 - \varepsilon^p) S a_{c_p} \rho_{c_p}) = -\kappa_{c_p w_p}, \quad (4.3.2)$$

où  $\kappa_{ij}$  est le transfert de masse de l'espèce  $i$  à l'espèce  $j$ . De façon similaire, on peut écrire les équations de bilan de masse pour les phases liquide et gazeuse. Par contre, outre le phénomène de la pyrolyse qui était également présent dans le bilan de masse des constituants solides, on doit ajouter l'effet de l'advection qui est donné par la divergence de la masse multipliée par la vitesse de déplacement du fluide. Ainsi, les équations donnant le bilan de masse de l'eau liquide ( $\varepsilon^p S a_{l_p} \rho_{l_p} y_{l_p}$ ), du combustible ( $\varepsilon^p S a_{g_p} \rho_{g_p} y_{F_{g_p}}$ ) et de la vapeur d'eau ( $\varepsilon^p S a_{g_p} \rho_{g_p} y_{v_{g_p}}$ ) sont respectivement

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon^p S a_{l_p} \rho_{l_p} y_{l_p}) + \nabla \cdot (\varepsilon^p S a_{l_p} \rho_{l_p} y_{l_p} \mathbf{v}_{l_p}) = -\kappa_{l_p v_{g_p}}, \quad (4.3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon^p S a_{g_p} \rho_{g_p} y_{F_{g_p}}) + \nabla \cdot (\varepsilon^p S a_{g_p} \rho_{g_p} y_{F_{g_p}} \mathbf{v}_{g_p} + \mathbf{j}_{F_{g_p}}) = -\kappa_{F_{g_p} w_p} \quad (4.3.4)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon^p S a_{g_p} \rho_{g_p} y_{v_{g_p}}) + \nabla \cdot (\varepsilon^p S a_{g_p} \rho_{g_p} y_{v_{g_p}} \mathbf{v}_{g_p} + \mathbf{j}_{v_{g_p}}) = -\kappa_{v_{g_p} l_p}. \quad (4.3.5)$$

Les quantités  $y_k$ ,  $\mathbf{v}_k$  et  $\mathbf{j}_k$  sont définies de la même manière que dans le cas de la strate de l'air ambiant.

### Bilan de quantité de mouvement

Pour les équations de conservation de quantité de mouvement, on utilise la loi de Darcy. En effet, on sait que la phase particule végétale est un milieu poreux dont la porosité  $\varepsilon^p$  est petite. Cette hypothèse est très réaliste, car le combustible est majoritairement solide, et donc très peu poreux. La vitesse des gaz et des liquides est donnée par la loi classique de Darcy. La loi de Darcy, comme son nom l'indique, fût décrite par Henry Philibert Gaspard Darcy (1803-1858). Ce dernier cherchait à étudier le phénomène d'écoulement de l'eau à travers le sable. Aujourd'hui, cette loi est très répandue dans le domaine des écoulements en milieux poreux. Cette dernière est valide pour des nombres de Reynolds d'un fluide petits (caractérisé par une faible vitesse d'un fluide visqueux) et pour des



porosités  $\varepsilon^p$  très petites. Dans ce cas, la vitesse superficielle du fluide peut être modélisée de la manière suivante :

$$\mathbf{V} = -\frac{\mathbf{k}}{\mu} (\nabla p - \rho \mathbf{g}) \quad (4.3.6)$$

où  $\mathbf{k}$  est le tenseur de perméabilité,  $\mu$  la viscosité du fluide,  $p$  la pression moyenne et  $\rho$  la densité moyenne. Pour en savoir plus, voir [27] et [28]. Pour écrire cette loi, il faut donc trouver une description du gradient de pression pour la phase liquide et gazeuse. Ces derniers sont exprimés de la façon suivante :

$$\nabla (\varepsilon^p S a_{g_p} p_{g_p}) = \varepsilon^p S a_{g_p} \rho_{g_p} \mathbf{g} - \mathbf{f}_{g_p s_p} - \mathbf{f}_{g_p l_p}, \quad (4.3.7)$$

$$\nabla (\varepsilon^p S a_{l_p} p_{l_p}) = \varepsilon^p S a_{l_p} \rho_{l_p} \mathbf{g} - \mathbf{f}_{l_p s_p} - \mathbf{f}_{l_p g_p}. \quad (4.3.8)$$

Ici, les  $\mathbf{f}_{ij}$  sont les quantités de mouvement transférées de la phase  $i$  à la phase  $j$ . En utilisant la loi de Darcy, on obtient une expression explicite pour la vitesse des liquides et des gaz.

$$\mathbf{v}_{g_p} = -\frac{\mathbf{k}_{g_p}}{(\varepsilon^p S a_{g_p})^2 \mu_{g_p}} (\mathbf{f}_{g_p s_p} + \mathbf{f}_{g_p l_p} + p_{g_p} \nabla (\varepsilon^p S a_{g_p})) \quad (4.3.9)$$

$$\mathbf{v}_{l_p} = -\frac{\mathbf{k}_{l_p}}{(\varepsilon^p S a_{l_p})^2 \mu_{l_p}} (\mathbf{f}_{l_p s_p} + \mathbf{f}_{l_p g_p} + p_{l_p} \nabla (\varepsilon^p S a_{l_p})), \quad (4.3.10)$$

où  $\mathbf{k}_{g_p}$  et  $\mathbf{k}_{l_p}$  sont les tenseurs de perméabilité. De manière similaire, on trouve la vitesse du fluide, c'est-à-dire  $\mathbf{v}_{f_p}$ . Il faut simplement définir  $\mathbf{f}_{f_p s_p} = \mathbf{f}_{l_p s_p} + \mathbf{f}_{g_p s_p}$ . On a ainsi que

$$\nabla (\varepsilon^p p_{f_p}) = \varepsilon^p \rho_{f_p} \mathbf{g} - \mathbf{f}_{f_p s_p}. \quad (4.3.11)$$

**Bilan d'énergie** Pour ce qui est du bilan d'énergie de la phase poreuse, il y a deux phénomènes à modéliser : le transport de l'énergie par le fluide qui se retrouve dans l'advection du fluide, la pression et la gravité et le flux de chaleur. L'équation s'écrit donc

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_p e_p) + \nabla \cdot (\varepsilon^p \rho_{f_p} e_{f_p} \mathbf{v}_{f_p} + \mathbf{q}_p + \varepsilon^p p_{f_p} \mathbf{v}_{f_p}) - \varepsilon^p \rho_{f_p} \mathbf{v}_{f_p} \cdot \mathbf{g} = 0. \quad (4.3.12)$$

Ici,  $e_p$  est l'énergie interne et est définie par  $\rho_p e_p = \varepsilon^p \rho_{f_p} e_{f_p} + (1 - \varepsilon^p) \rho_{s_p} e_{s_p}$ . Les  $e_{s_p}$  et  $e_{f_p}$  sont les énergies internes respectivement de la phase solide et fluide de la phase particule végétale. On a également que  $\mathbf{q}_p$  est le flux de chaleur.

### 4.3.2. Conditions aux bords entre les phases poreuse et gazeuse

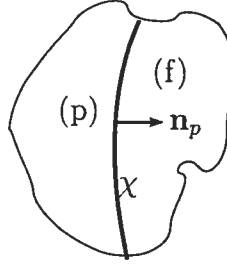


FIG. 4.3.1. Frontière entre les phases poreuse et gazeuse.

On a maintenant les équations décrivant ce qui se passe à l'intérieur des phases poreuse et gazeuse. Cependant, il reste à décrire les phénomènes se produisant à la frontière de ces deux phases. Premièrement, on émet l'hypothèse que toutes les variables au niveau mésoscopique sont continues lorsqu'elles passent d'une phase à l'autre. Cela signifie qu'il n'y a pas de sauts entre les phases végétale et gazeuse en ce qui concerne les flux de masse, de quantité de mouvement et d'énergie. Notons par  $\chi$  la frontière entre les deux phases et  $\mathbf{n}_p$  le vecteur normal à  $\chi$  allant de la phase végétale vers la phase gazeuse. Posons également  $\mathbf{w}_\chi$  la vitesse de déplacement de la frontière  $\chi$ . Le bilan de masse pour les constituants du gaz sur la frontière est alors donné par

$$\begin{aligned} & [\varepsilon^p S a_{g_p} \rho_{g_p} y_{ig_p} (\mathbf{v}_{g_p} - \mathbf{w}_\chi) + \mathbf{j}_{ig_p}] \cdot \mathbf{n}_p - \\ & [\rho_f y_{if} (\mathbf{v}_f - \mathbf{w}_\chi) + \mathbf{j}_{igf}] \cdot \mathbf{n}_p = 0, \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

$i = F, v, O_2, N_2$  et  $R$ . On suppose qu'il n'y a pas de transfert d'eau liquide entre la phase particule végétale et la phase de l'air. On a également l'équation de quantité de mouvement de la phase gazeuse sur la frontière :

$$\begin{aligned} & [\rho_f (\mathbf{v}_f - \mathbf{w}_\chi) \otimes \mathbf{v}_f - \sigma_f] \cdot \mathbf{n}_p - \\ & [\varepsilon^p \rho_{f_p} (\mathbf{v}_{f_p} - \mathbf{w}_\chi) \otimes \mathbf{v}_{f_p} - \sigma_p] \cdot \mathbf{n}_p = 0. \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

Ici,  $\sigma_k$  est le tenseur de contraintes dans la phase  $k$ . Finalement, la condition de continuité pour l'énergie est

$$\begin{aligned} & \left[ \rho_f \left( e_f + \frac{1}{2} |\mathbf{v}_f|^2 \right) (\mathbf{v}_f - \mathbf{w}_\chi) - (\mathbf{q}_f - \mathbf{v}_f \cdot \sigma_f) - p_f \mathbf{w}_\chi \right] \cdot \mathbf{n}_p - \\ & \left[ \varepsilon^p \rho_{f_p} \left( e_{f_p} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}_{f_p}|^2 \right) (\mathbf{v}_{f_p} - \mathbf{w}_\chi) - (\mathbf{q}_{f_p} - \mathbf{v}_{f_p} \cdot \sigma_{f_p}) - \varepsilon^p p_{f_p} \mathbf{w}_\chi \right] \cdot \mathbf{n}_p = 0. \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

Certaines hypothèses devront être ajoutées afin d'obtenir un problème bien posé. Ainsi, on suppose que le saut de température à la frontière est nul, c'est-à-dire que  $T_f = T_p$ . Posons également l'égalité entre les composantes tangentielles des différentes vitesses à l'interface  $\chi$ , c'est-à-dire

$$[\mathbf{v}_f - (\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n}_p) \mathbf{v}_f] - [\mathbf{v}_{f_p} - (\mathbf{v}_{f_p} \cdot \mathbf{n}_p) \mathbf{v}_{f_p}] = 0. \quad (4.3.16)$$

Un peu plus loin, on effectuera un bilan des fonctions à déterminer et on fermera le système avec l'aide de la thermodynamique.

### 4.3.3. Obtention des équations macroscopiques pour la strate végétale par prise de moyenne

Jusqu'ici, on a obtenu un système d'équations à l'échelle mésoscopique. Cependant, on a besoin d'équations à l'échelle macroscopique afin de pouvoir coupler ces équations de la strate végétale avec celles de l'air ambiant et du sol. On veut également que les variables de la strate végétale soient continues et dérivables à l'échelle macroscopique, ce qui n'est pas le cas avec ce qu'on a dérivé présentement. On va procéder par homogénéisation.

#### 4.3.3.1. Prolongement des variables et des équations

Pour l'instant, les variables et les équations obtenues pour la strate végétale ne sont définies que pour un sous-domaine de cette strate. On doit donc les prolonger sur tout le domaine avant de passer à l'étape de prise de moyenne. Pour ce faire, on prolonge les variables de la manière suivante (exemple avec  $\rho_a$ ,  $a$  une phase

arbitraire) :

$$\hat{\rho}_a = \begin{cases} \rho_a, & \text{dans la phase } a \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On prolonge également les différentes dérivées sur toute la strate végétale. Ainsi, on a que

$$\begin{aligned} \nabla \hat{f} &= \nabla f + f \mathbf{n}_a \delta_\chi \\ \nabla \cdot \hat{\mathbf{f}} &= \nabla \cdot \mathbf{f} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_a \delta_\chi \\ \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial t} - f \mathbf{w}_\chi \cdot \mathbf{n}_a \delta_\chi \end{aligned}$$

où  $\chi$  est la frontière du domaine des variables et fonctions,  $f$  une fonction quelconque,  $\mathbf{w}_\chi$  la vitesse de l'interface et  $\delta_\chi$  est la fonction indicatrice :

$$\delta_\chi = \begin{cases} 1, & \text{sur } \chi \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Décrivons par exemple l'équation de conservation de masse pour l'espèce  $i$  dans la phase de l'air. Avant le prolongement, on avait que

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_f y_{if}) + \nabla \cdot (\rho_f y_{if} \mathbf{v}_f + \mathbf{j}_{if}) = \dot{\omega}_{if}.$$

Cette équation devient après le prolongement

$$\frac{\partial}{\partial t} (\hat{\rho}_f \hat{y}_{if}) + \nabla \cdot (\hat{\rho}_f \hat{y}_{if} \hat{\mathbf{v}}_f + \hat{\mathbf{j}}_{if}) = \hat{\omega}_{if} + [\hat{\rho}_f \hat{y}_{if} (\hat{\mathbf{v}}_f - \mathbf{w}_\chi) + \hat{\mathbf{j}}_{if}] \cdot \mathbf{n}_f \delta_\chi \quad (4.3.17)$$

où  $\mathbf{n}_f = -\mathbf{n}_p$ . On répète ce processus avec toutes les équations de la phase végétale et de la phase gazeuse. On ne le fera pas explicitement ici, mais on utilisera ces résultats par la suite. Le tout est fait dans [10].

#### 4.3.3.2. Fonctions de distribution

L'objectif à présent est de trouver la valeur macroscopique des variables de la strate végétale en un point  $\mathbf{x}$  et à un moment  $t$ . La méthode utilisée pour résoudre ce problème est d'effectuer une moyenne de ces variables dans un certain rayon autour de  $\mathbf{x}$ . Ce processus permet de lisser les variations et les discontinuités. Ces

moyennes sont réalisées en se servant d'un produit de convolution par le poids  $m(\mathbf{x})$ . La fonction de lissage la plus répandue est la fonction suivante :

$$m(\mathbf{x}) = \begin{cases} C \exp \left[ \frac{-1}{1 - (|\mathbf{x}|/r)^2} \right], & \text{si } |\mathbf{x}|/r < 1 \\ 0, & \text{si } |\mathbf{x}|/r \geq 1. \end{cases}$$

Ici,  $C$  est une constante qui normalise à 1 l'intégrale de  $m(\mathbf{x})$  sur  $\mathbb{R}^3$ . Quant à  $r$ , son ordre de grandeur est celui de l'échelle mésoscopique, c'est-à-dire plus grand que l'échelle où il y a les petites fluctuations mésoscopiques. Le produit de convolution d'une certaine variable  $u(\mathbf{x}, t)$  par la fonction de poids  $m(\mathbf{x})$  est donné par

$$U(\mathbf{x}, t) := (u * m)(\mathbf{x}, t) := \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) m(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (4.3.18)$$

Soulignons aussi que la quantité macroscopique  $U$  est infiniment différentiable. Définissons maintenant la fonction caractéristique de la phase de l'air ambiant. Elle est notée par  $\Theta_f(\mathbf{x}, t)$ .  $\Theta_f(\mathbf{x}, t)$  est égale à 1 à l'intérieur de la phase de l'air et 0 à l'extérieur. De façon similaire, on définit la fonction caractéristique  $\Theta_p(\mathbf{x}, t)$  pour la phase particule végétale. Notons que lorsque l'on prend la convolution de ces deux fonctions caractéristiques, on obtient respectivement la porosité  $\Phi$  et  $1 - \Phi$  :

$$\Phi = \Theta_f * m$$

$$1 - \Phi = \Theta_p * m.$$

Cette définition de la porosité est cohérente avec celle proposée dans la section 4.1.2. Il ne reste plus qu'à faire les moyennes des variables et à réécrire les systèmes d'équations.

#### 4.3.3.3. Exemple de prise de moyenne

Puisque c'est un long processus, on ne présente qu'un exemple de la manière d'obtenir les équations macroscopiques. On ne présentera pas les raisons mathématiques de la commutativité des opérateurs de dérivation et de la convolution. Le tout est présenté dans [13]. Prenons l'exemple utilisé plus tôt, c'est-à-dire

l'équation de conservation de masse dans la phase de l'air :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\hat{\rho}_f \hat{y}_{if}) + \nabla \cdot (\hat{\rho}_f \hat{y}_{if} \hat{\mathbf{v}}_f + \hat{\mathbf{j}}_{if}) = \hat{\omega}_{if} + [\hat{\rho}_f \hat{y}_{if} (\hat{\mathbf{v}}_f - \mathbf{w}_\chi) + \hat{\mathbf{j}}_{if}] \cdot \mathbf{n}_f \delta_\chi \quad (4.3.19)$$

Après la prise de moyenne, on peut réécrire cette équation comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Phi \rho_f Y_{if}) + \nabla \cdot (\Phi \rho_f Y_{if} \mathbf{V}_f + \mathbf{J}_{if}) = \Phi \dot{\omega}_{if} - K_i^{fp}. \quad (4.3.20)$$

Les nouvelles variables macroscopiques sont obtenues grâce aux relations qui suivent. On a mis les variables définies entre crochets.

$$\Phi [\rho_f] = \hat{\rho}_f * m \quad (4.3.21a)$$

$$\Phi \rho_f [\mathbf{V}_f] = \hat{\rho}_f \hat{\mathbf{v}}_f * m \quad (4.3.21b)$$

$$\Phi \rho_f [Y_{if}] = \hat{\rho}_f \hat{y}_{if} * m \quad (4.3.21c)$$

$$\Phi \rho_f Y_{if} \mathbf{V}_f + [\mathbf{J}_{if}] = (\hat{\rho}_f \hat{y}_{if} \hat{\mathbf{v}}_f + \hat{\mathbf{j}}_{if}) * m \quad (4.3.21d)$$

$$\Phi [\dot{\omega}_{if}] = \hat{\omega}_{if} * m \quad (4.3.21e)$$

$$[K_i^{fp}] = (\hat{\rho}_f \hat{y}_{if} (\hat{\mathbf{v}}_f - \mathbf{w}_\chi) \cdot \mathbf{n}_f \delta_\chi) * m. \quad (4.3.21f)$$

Le terme  $K_i^{fp}$  représente le taux de transfert de masse de la phase  $f$  vers la phase  $p$  pour l'espèce  $i$ . Définissons  $K^{fp}$ , le taux de transfert de masse totale, par la somme sur les  $i$  des  $K_i^{fp}$ . Regardons maintenant les autres équations de la phase de l'air ambiant et de la phase particule végétale.

#### 4.3.3.4. Équations homogénéisées

On ne définit pas toutes les quantités macroscopiques pour chacune des équations comme on vient de le faire. Le tout est décrit dans [10] et [11]. On détaille simplement celles qui sont utiles plus loin lorsque l'on fermara le système avec des lois de thermodynamique des processus irréversibles. Ainsi, on a que l'équation de bilan de quantité de mouvement devient

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Phi \rho_f \mathbf{V}_f) + \nabla \cdot (\Phi \rho_f \mathbf{V}_f \otimes \mathbf{V}_f - \mathcal{T}_f) = \Phi \rho_f \mathbf{g} - K^{fp} \mathbf{V}_f - \mathbf{F}^{fp}. \quad (4.3.22)$$

Ici  $\mathbf{F}^{fp}$  est défini de la manière suivante :

$$K^{fp} \mathbf{V}_f + [\mathbf{F}^{fp}] = (\hat{\rho}_f \hat{\mathbf{v}}_f (\hat{\mathbf{v}}_f - \mathbf{w}_\chi) - \hat{\sigma}_f) \cdot \mathbf{n}_f \delta_\chi * m$$

et  $\mathcal{T}_f$  par

$$\Phi \rho_f \mathbf{V}_f \otimes \mathbf{V}_f - [\mathcal{T}_f] = (\widehat{\rho}_f \widehat{\mathbf{v}}_f \otimes \widehat{\mathbf{v}}_f - \widehat{\sigma}_f) * m$$

On a également que l'équation de bilan d'énergie devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \Phi \rho_f \left( E_f + \frac{1}{2} \mathbf{V}_f^2 \right) \right) + \nabla \cdot \left( \Phi \rho_f \left( E_f + \frac{1}{2} \mathbf{V}_f^2 \right) \mathbf{V}_f + \mathbf{Q}_f - \mathcal{T}_f \cdot \mathbf{V}_f \right) \\ = \Phi \rho_f \mathbf{g} \cdot \mathbf{V}_f - P_f \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \left( E_f + \frac{1}{2} \mathbf{V}_f^2 + \frac{P_f}{\rho_f} \right) K^{fp} - X^{fp}. \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

Finalement, on obtient les relations suivantes :

$$E_f = \sum_i H_{if} Y_{if} - \frac{P_f}{\rho_f}, \quad (4.3.24)$$

$$H_{if} = H_{if}^0 + \int_{T_0}^{T_f} C_{p,if} dT, \quad (4.3.25)$$

et

$$P_f = \rho_f R T_f \sum_i \frac{Y_{if}}{W_i}. \quad (4.3.26)$$

Il reste maintenant à appliquer le même processus aux équations de la phase végétale. Auparavant, on doit définir la porosité macroscopique  $\mathcal{E}^p$ . Elle est définie à l'aide de la relation suivante :

$$(1 - \Phi) [\mathcal{E}^p] = \widehat{\mathcal{E}}^p * m.$$

Ainsi, les équations 4.3.1 et 4.3.2 deviennent

$$\frac{\partial}{\partial t} ((1 - \Phi) (1 - \mathcal{E}^p) S a_{w_p} \rho_{w_p}) = -(1 - \Phi) (K_{w_p F g_p} + K_{w_p c_p}) \quad (4.3.27)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} ((1 - \Phi) (1 - \mathcal{E}^p) S a_{c_p} \rho_{c_p}) = -(1 - \Phi) K_{c_p w_p}. \quad (4.3.28)$$

L'équation 4.3.3 qui décrit le bilan de masse de l'eau devient

$$\frac{\partial}{\partial t} ((1 - \Phi) \mathcal{E}^p S a_{l_p} \rho_{l_p}) + \nabla \cdot ((1 - \Phi) \mathcal{E}^p S a_{l_p} \rho_{l_p} \mathbf{V}_{l_p}) = -(1 - \Phi) K_{l_p v g_p}. \quad (4.3.29)$$

De manière similaire, on obtient pour les équations 4.3.4 et 4.3.5 que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} ((1 - \Phi) \mathcal{E}^p S a_{g_p} \rho_{g_p} Y_{F_{g_p}}) \\ + \nabla \cdot ((1 - \Phi) \mathcal{E}^p S a_{g_p} \rho_{g_p} Y_{F_{g_p}} \mathbf{V}_{g_p} + \mathbf{J}_{F_{g_p}}) \\ = -(1 - \Phi) K_{F_{g_p} w_p} - K_{F_{g_p}}^{pf} \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} ((1 - \Phi) \mathcal{E}^p S a_{g_p} \rho_{g_p} Y_{v_{g_p}}) \\ + \nabla \cdot ((1 - \Phi) \mathcal{E}^p S a_{g_p} \rho_{g_p} Y_{v_{g_p}} \mathbf{V}_{g_p} + \mathbf{J}_{v_{g_p}}) \\ = -(1 - \Phi) K_{v_{g_p} l_p} - K_{v_{g_p}}^{pf}. \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

Précisons que  $K_g^{pf} = K_{F_{g_p}}^{pf} + K_{v_{g_p}}^{pf}$  est le transfert total de gaz de la phase  $p$  à la phase  $f$ . On peut également définir la densité totale ainsi que la vitesse barycentrique :

$$\rho_p = \mathcal{E}^p \rho_{f_p} + (1 - \mathcal{E}^p) \rho_{s_p}$$

$$\rho_{f_p} \mathbf{V}_{f_p} = S a_{g_p} \rho_{g_p} \mathbf{V}_{g_p} + S a_{l_p} \rho_{l_p} \mathbf{V}_{l_p}.$$

Regardons maintenant ce qui arrive aux équations 4.3.7 et 4.3.8, c'est-à-dire les équations de gradient de pression obtenues grâce à la loi de Darcy,

$$\nabla ((1 - \Phi) \mathcal{E}^p S a_{g_p} P_{g_p}) - (1 - \Phi) \mathcal{E}^p S a_{g_p} \rho_{g_p} \mathbf{g} + \mathbf{F}_{g_p l_p} + \mathbf{F}_{g_p s_p} + \mathbf{F}_{g_p}^{pf} = 0$$

$$\nabla ((1 - \Phi) \mathcal{E}^p S a_{l_p} P_{l_p}) - (1 - \Phi) \mathcal{E}^p S a_{l_p} \rho_{l_p} \mathbf{g} + \mathbf{F}_{l_p g_p} + \mathbf{F}_{l_p s_p} + \mathbf{F}_{l_p}^{pf} = 0.$$

En posant  $P_{f_p} = S a_{g_p} P_{g_p} + S a_{l_p} P_{l_p}$ , on peut combiner les deux dernières équations et obtenir

$$\nabla ((1 - \Phi) \mathcal{E}^p P_{f_p}) - (1 - \Phi) \mathcal{E}^p \rho_{f_p} \mathbf{g} + \mathbf{F}_{g_p s_p} + \mathbf{F}_{l_p s_p} + \mathbf{F}_{g_p}^{pf} + \mathbf{F}_{l_p}^{pf} = 0. \quad (4.3.32)$$



Il ne reste plus qu'à traiter de bilan d'énergie 4.3.12. Pour ce faire, on a besoin des définitions suivantes :

$$\rho_p E_p = (1 - \mathcal{E}^p) (Sa_{w_p} \rho_{w_p} H_{w_p} + Sa_{c_p} \rho_{c_p} H_{c_p}) \\ + \mathcal{E}^p \left( Sa_{g_p} \rho_{g_p} \sum_i H_{ig_p} Y_{ig_p} + Sa_{l_p} \rho_{l_p} H_{l_p} - P_{f_p} \right),$$

$$H_{ig_p} = H_{ig_p}^0 + \int_{T_0}^{T_p} C_{p,ig_p} dT,$$

$$P_{g_p} = \rho_{g_p} R T_p \sum_i Y_{ig_p} / W_{ig_p}.$$

Ici,  $\rho_{w_p}$ ,  $\rho_{c_p}$  et  $\rho_{l_p}$  sont considérés comme constants. Ainsi, l'équation de bilan d'énergie devient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} ((1 - \Phi) \rho_p E_p) + \nabla \cdot ((1 - \Phi) \rho_{f_p} E_{f_p} \mathbf{V}_{f_p} + \mathbf{Q}_p) \\ & + \nabla \cdot ((1 - \Phi) \mathcal{E}^p (Sa_{g_p} P_{g_p} \mathbf{V}_{g_p} + Sa_{l_p} P_{l_p} \mathbf{V}_{l_p})) \\ & = -P_{g_p} \frac{\partial}{\partial t} ((1 - \Phi) \mathcal{E}^p Sa_{g_p}) - P_{l_p} \frac{\partial}{\partial t} ((1 - \Phi) \mathcal{E}^p Sa_{l_p}) \\ & - \frac{P_{g_p}}{\rho_{g_p}} K_{g_p l_p} - \frac{P_{l_p}}{\rho_{l_p}} K_{l_p v_{g_p}} - E_p K^{pf} - (1 - \Phi) \rho_{f_p} \mathbf{V}_{f_p} \cdot \mathbf{g} - X^{pf}. \end{aligned} \quad (4.3.33)$$

De plus, les conditions de compatibilité suivantes sont toujours valides après l'homogénéisation :

$$\sum_i Y_{if} = 1, \quad Y_{F_{g_p}} + Y_{v_{g_p}} = 1, \quad \sum_i \mathbf{J}_{if} = 0$$

$$\mathbf{J}_{F_{g_p}} + \mathbf{J}_{v_{g_p}} = 0,$$

$$K_i^{pf} + K_i^{fp} = 0,$$

$$\mathbf{F}_{g_p}^{pf} + \mathbf{F}_{l_p}^{pf} + \mathbf{F}^{fp} + K^{fp} \mathbf{V}_f = 0$$

$$\begin{aligned} & \left( E_f + \frac{P_f}{\rho_f} + \frac{1}{2} |\mathbf{V}_f|^2 \right) K^{fp} + P_f \frac{\partial \Phi}{\partial t} + X^{fp} + E_p K^{pf} + \frac{P_{l_p}}{\rho_{l_p}} K_{l_p}^{pf} + X^{pf} \\ & + \frac{P_{g_p}}{\rho_{g_p}} K_{g_p}^{pf} + P_{g_p} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi \mathcal{E}^p Sa_{g_p}) + P_{l_p} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi \mathcal{E}^p Sa_{l_p}) = 0. \end{aligned}$$

En effectuant ces prises de moyenne, on a introduit de nouvelles variables. On est donc en possession d'un système avec plus d'inconnues que d'équations. C'est pourquoi on doit trouver d'autres relations afin de fermer le système.

#### 4.3.4. Fermeture du système

Le système obtenu par la procédure ci-dessus n'est pas fermé. Par exemple en ce qui concerne la phase de l'air de la strate végétale, le système décrit l'évolution des variables macroscopiques suivantes :

- $\rho_f$ , la densité qui obéit à l'équation de conservation de masse,
- $\mathbf{V}_f$ , la vitesse donnée par l'équation de conservation de la quantité de mouvement,
- $Y_{if}$ , la fraction massique du gaz  $i$  donnée par la conservation de cette fraction massique,
- $E_f$ , l'énergie interne donnée par l'équation de conservation d'énergie.

Ces équations font elles-mêmes appel à des flux et des sources macroscopique tels que  $\mathbf{J}_{if}$ ,  $\mathcal{J}_f$ ,  $\mathbf{Q}_f$ ,  $\dot{\omega}_{if}$ ,  $K_i^{fp}$ ,  $X^{fp}$  et  $\mathbf{F}^{fp}$ . Ceux-ci ont été définis à partir de moyennes de fonctions non-linéaires des quantités mésoscopiques. À cause de cette non-linéarité, il n'est pas possible en général d'exprimer ces flux et sources en terme des variables macroscopiques. Par exemple, l'équation 4.3.21d donne la définition de  $\mathbf{J}_{if}$  à partir de la convolution du produit  $\hat{\rho}_f \hat{y}_{if} \hat{\mathbf{v}}_f$ . En général, on a que

$$(\hat{\rho}_f \hat{y}_{if} \hat{\mathbf{v}}_f) * m \neq \Phi \rho_f Y_{if} \mathbf{V}_f.$$

C'est l'absence de relation entre ces flux macroscopiques et les variables macroscopiques qu'on appelle le problème de fermeture. Pour néanmoins résoudre le système, on va modéliser les flux et les sources en terme des variables connues. Il existe plusieurs façons de les modéliser. Margerit utilise les principes de la thermodynamique des processus irréversibles. Après une série de transformations que l'on ne décrit pas dans ce mémoire (voir [10] et [12]), il obtient des relations pour chacune des quantités énumérées ci-haut. Par exemple,  $\mathbf{J}_{if}$  est modélisé par une relation de type loi de Fick, où le flux de la quantité  $\mathbf{J}_{if}$  est supposé proportionnel

au gradient de  $Y_{if}$  :

$$\mathbf{J}_{if} = -\Phi \rho_f d_{if} \nabla Y_{if},$$

avec  $\Phi$  la porosité donnée,  $d_{if}$  une constante de diffusion résultant du modèle et les variables macroscopiques  $\rho_f$  et  $Y_{if}$ . On peut également simplifier et réarranger les équations des divers bilans de la strate végétale. Ainsi l'équation de bilan d'énergie de la phase végétale devient

$$(1 - \Phi) \rho_p C_P^p \frac{\partial T_p}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda_p \nabla T_p - \mathbf{Q}_{pr}) + R_{cp} + \chi(T_f - T_p). \quad (4.3.34)$$

Ici,  $T_p$  est la température de la phase végétale,  $\lambda_p$  la conductivité thermique et  $\mathbf{Q}_{pr}$  est le flux chaleur causée par la radiation au niveau de la phase poreuse. On a également que la capacité thermique est donnée par

$$\begin{aligned} C_P^p = & (1 - \mathcal{E}^p) \left( Sa_{w_p} \frac{\rho_{w_p}}{\rho_p} C_{P_{w_p}} + Sa_{c_p} \frac{\rho_{c_p}}{\rho_p} C_{P_{c_p}} \right) \\ & + \mathcal{E}^p \left( Sa_{g_p} \frac{\rho_{g_p}}{\rho_p} \sum_i Y_{ig_p} C_{P_{ig_p}} + Sa_{l_p} \frac{\rho_{l_p}}{\rho_p} C_{P_{l_p}} \right), \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

où  $C_{P_{ij}}$  est la capacité thermique mésoscopique. On définit aussi

$$R_{cp} = -(1 - \mathcal{E}^p)(Sa_{w_p} \rho_{w_p} Q_{w_p} + Sa_{l_p} \rho_{l_p} Q_v), \quad (4.3.36)$$

où  $Q_{w_p}$  est la chaleur créée par la pyrolyse et  $Q_v$  celle par l'évaporation de l'eau. Passons maintenant aux équations de bilan de masse pour les solides, liquides et gaz :

$$\frac{\partial}{\partial t} ((1 - \Phi)(1 - \mathcal{E}^p) Sa_{w_p} \rho_{w_p}) = -(1 - \Phi)(1 - \mathcal{E}^p) Sa_{w_p} \rho_{w_p} k_{w_p c_p}(T_p), \quad (4.3.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} ((1 - \Phi)(1 - \mathcal{E}^p) Sa_{c_p} \rho_{c_p}) = (1 - \Phi)(1 - \mathcal{E}^p) Sa_{w_p} \rho_{w_p} k_{w_p c_p}(T_p), \quad (4.3.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} ((1 - \Phi) \mathcal{E}^p Sa_{l_p}) = -(1 - \Phi) \mathcal{E}^p Sa_{l_p} k_{l_p v_{gp}}(T_p), \quad (4.3.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} ((1 - \Phi) \mathcal{E}^p Sa_{g_p} \rho_{g_p} Y_{F_{gp}}) = -(1 - \Phi)(1 - \mathcal{E}^p) Sa_{w_p} Sa_{w_p} k_{w_p F_{gp}}(T_p) - K_{F_{gp}}^{pf} \quad (4.3.40)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} ((1 - \Phi) \mathcal{E}^p Sa_{g_p} \rho_{g_p} Y_{v_{gp}}) = (1 - \Phi) \mathcal{E}^p Sa_{l_p} \rho_{l_p} k_{l_p v_{gp}}(T_p) - K_{v_{gp}}^{pf}. \quad (4.3.41)$$

Ici,  $K_{ip}^{pf}$  est le flux de gaz passant de la phase  $p$  à la phase  $f$  pour  $i = v, F$ . On suppose aussi que  $\rho_{wp}$ ,  $\rho_{cp}$  et  $\rho_{lp}$  restent constants. Passons maintenant aux équations dans la phase air de la strate végétale. L'équation de bilan d'énergie est

$$\Phi \rho_f C_P^f \left( \frac{\partial T_f}{\partial t} + \mathbf{V}_f \cdot \nabla T_f \right) = \nabla \cdot (\lambda_f \nabla T_f - \mathbf{Q}_{rf}) + R_{cf} - \chi(T_f - T_p), \quad (4.3.42)$$

où  $R_{cf} = Q_{cf} \Psi(T_f)$  avec  $\Psi(T_f) = k(T_f)(\rho_f Y_{Ff})^{\nu_F} (\rho_f Y_{Of})^{\nu_O}$ . On a également que

$$C_p^f = \sum_i Y_{if} C_p^i.$$

Pour l'équation de bilan de quantité de mouvement, on a

$$\begin{aligned} \Phi \rho_f C_P^f \left( \frac{\partial \mathbf{V}_f}{\partial t} + \nabla \mathbf{V}_f \cdot \mathbf{V}_f \right) = & -\Phi \nabla P_f + \Phi \rho_f \mathbf{g} + \nabla (\lambda \nabla \cdot \mathbf{V}_f) \\ & + (K^{pf} \mathbf{Id} - \eta \Phi^2 \kappa^{-1}) \mathbf{V}_f + \mu \Delta \mathbf{V}_f, \end{aligned} \quad (4.3.43)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux viscosités,  $\eta$  est la viscosité au niveau microscopique,  $\kappa^{-1}$  est un tenseur de traînée,  $\mathbf{Id}$  le tenseur identité et  $K^{pf} = \sum_i K_i^{pf}$ . Pour ce qui est de l'équation de bilan de masse de l'espèce  $i$ , elle est donnée par

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Phi \rho_f Y_{if}) + \nabla \cdot (\Phi \rho_f Y_{if} \mathbf{V}_f + \mathbf{J}_{if}) = \Phi \dot{\omega}_{if} + K_{ip}^{pf}. \quad (4.3.44)$$

Ici,  $\dot{\omega}_j = -\nu_j W_j \Psi(T_f, Y_F, Y_{O_2})$  pour  $j = F, O_2$ ,  $\dot{\omega}_P = \nu_P W_P \Psi(T_f, Y_F, Y_{O_2})$  et  $\dot{\omega}_{N_2} = \dot{\omega}_v = 0$ .

#### 4.3.5. Conditions aux bords des différentes strates

Premièrement, regardons les conditions sur la frontière  $\bar{\Sigma}$ , c'est-à-dire entre les strates de l'air ambiant et végétale. Tout d'abord, il y a continuité des variables de ces deux strates. Sur la frontière, il n'y a qu'une relation qui est

$$-\lambda_p \nabla T_p \cdot \mathbf{n} = h_L(T_p - T_e) + \mathcal{M}_r. \quad (4.3.45)$$

Ici,  $\mathcal{M}_r$  est le flux de radiation des flammes de la strate végétale,  $T_e$  est la température des gaz de la strate de l'air ambiant et par continuité vaut  $T_f$ . Il reste

les relations à l'interface  $\underline{\Sigma}$ . On utilise les trois relation suivantes :

$$\nabla T_p \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (4.3.46)$$

$$\nabla T_f \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (4.3.47)$$

$$\mathbf{V}_f = 0. \quad (4.3.48)$$

#### 4.4. ÉQUATIONS À L'ÉCHELLE GIGASCOPIQUE : RÉDUCTION DU SYSTÈME MACROSCOPIQUE TRIDIMENSIONNEL À UN SYSTÈME BIDIMENSIONNEL

Tout le principe de la réduction du système de trois dimensions à un système de deux dimensions repose sur l'hypothèse que l'échelle verticale des phénomènes reliés à la propagation de feux de forêts est supposée très petite à comparer avec l'échelle de longueur de terrain. En d'autres termes, si  $h$  est la hauteur caractéristique et  $L_f$  est la longueur caractéristique, alors  $h/L_f \ll 1$ . On dira que ce rapport est de l'ordre de  $\epsilon$ . Ainsi, on passe à un système adimensionnalisé en effectuant le changement de coordonnées  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/L$ . On effectue également les changements suivants :

$$\bar{T}_j = (T_j - T_a)/T_a,$$

où  $T_a$  est la température ambiante loin du front de flamme et  $j = p, f$ ,

$$\bar{t} = t \frac{\mathcal{M}_r}{(1 - \Psi) \bar{\rho}_p \bar{C}_p^p (T_{inf} - T_a) \delta},$$

où  $T_{inf}$  est la température d'inflammation,  $\mathcal{M}_r$  est un flux de chaleur,  $\bar{\rho}_p$  et  $\bar{C}_p^p$  sont respectivement les moyennes de la densité massique et de la capacité thermique et  $\delta$  est la hauteur de la végétation. Cette adimensionnalisation du temps possède un sens physique. L'échelle de temps est le temps nécessaire afin qu'un cube de dimension  $\delta$  entre en combustion sous l'effet d'un flux radiatif  $\mathcal{M}_r$ . Afin de simplifier les calculs, on suppose que la hauteur de la végétation est constante. Pour la suite de cette section, on omettra de surligner les variables adimensionnelles. Définissons maintenant le domaine  $\Omega$  sur lequel on travaille,

$$\Omega := \{(x, y, z) | (x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < z < \delta/L_f = \epsilon\}.$$

Posons le changement de variables  $z_1 = z/\epsilon$  et  $t_1 = t/\epsilon^2$ . On peut maintenant passer au développement asymptotique d'une quantité  $f(x, y, z_1, t_1)$ , c'est-à-dire

$$f(x, y, z, t) = f_0(x, y, z_1, t_1) + \epsilon f_1(x, y, z_1, t_1) + \epsilon^2 f_2(x, y, z_1, t_1) + \dots \quad (4.4.1)$$

#### 4.4.1. Hypothèses

Pour que ce développement soit valide, on doit supposer les trois hypothèses suivantes :

- (1) la composante verticale de la vitesse  $\mathbf{V}_f$  est de l'ordre de  $\epsilon$ . En d'autres termes, si  $\mathbf{V}_f = \mathbf{V}_{f0} + \epsilon \mathbf{V}_{f1} + \epsilon^2 \mathbf{V}_{f2} + \dots$ , alors  $\mathbf{V}_{f0} = (u_0, v_0, 0)$ ,
- (2) les températures  $T_p$  et  $T_f$  sont du même ordre de grandeur sur une petite région autour de l'interface entre la phase particule végétale et la phase de l'air,
- (3) le flux radiatif  $\mathcal{M}_r$  est d'ordre  $\epsilon$ .

L'hypothèse 1 signifie que le déplacement des gaz s'effectue seulement horizontalement lorsque l'on considère seulement le premier terme du développement. Donc, en se contraignant au premier terme du développement, on ne modélise plus les feux de grandes intensités.

#### 4.4.2. Exemple de réduction de dimension

On est maintenant en mesure de passer au développement asymptotique des équations 4.3.34 à 4.3.44. Pour ce faire, on remplace les opérateurs  $\frac{\partial}{\partial t}$  par  $\frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial}{\partial t_1}$  et  $\frac{\partial}{\partial z}$  par  $\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial z_1}$ . Regardons ce qui se produit avec l'équation 4.3.34. On donnera, par la suite, les résultats pour les autres équations sans entrer dans leur dérivation. Le tout est fait dans [10] et [12]. Initialement, on a l'équation

$$(1 - \Phi) \rho_p C_p^p \frac{\partial T_p}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda_p \nabla T_p - \mathbf{Q}_{pr}) + R_{cp} + \chi(T_f - T_p).$$

Après avoir remplacé les variables par leur développement asymptotique, changé l'opérateur et multiplié par  $\epsilon^2$ , on regarde ce qui arrive à chacun des ordres de  $\epsilon$ . Ainsi, pour l'ordre  $\epsilon^0$ , on a

$$(1 - \Phi) \rho_{p0} C_{p0}^p \frac{\partial T_{p0}}{\partial t_1} = \lambda_{p0} \frac{\partial^2 T_{p0}}{\partial z_1^2}. \quad (4.4.2)$$

Ce résultat est valide pour  $0 < z_1 < 1$ . On possède également les conditions

$$\frac{\partial T_{p0}}{\partial z_1} = 0 \quad \text{pour } z_1 = 1 \quad (\text{condition de continuité de la température sur } \bar{\Sigma}) \quad (4.4.3)$$

$$\frac{\partial T_{p0}}{\partial z_1} = 0 \quad \text{pour } (\mathbf{V}_f)_z = O(\epsilon) \quad (\text{par l'hypothèse 1}) \quad (4.4.4)$$

En effectuant le même processus pour les ordres 1 et 2 de  $\epsilon$  et simplifiant quelque peu, on obtient la relation suivante :

$$(1 - \Phi)\rho_{p0}C_{p0}^p \frac{\partial T_{p0}}{\partial t} = \lambda_{p0}\Delta_S T_{p0} - \nabla_S \cdot \mathbf{Q}_{rp0} + R_{cp0} + \chi'(T_{f0} - T_{p0}) + \mathcal{M}_r \quad (4.4.5)$$

L'indice  $S$  signifie que l'opérateur est pris par rapport aux variables  $x$  et  $y$ . On effectue par la suite la même chaîne d'opérations et en appliquant quelques simplifications, on obtient le système donné plus loin. On pourrait également éviter certaines hypothèses, mais cela augmenterait énormément la complexité du système.

#### 4.5. FLUX RADIATIF $\mathcal{M}_r$

Jusqu'ici, on a été discret sur le flux radiatif  $\mathcal{M}_r$ . Celui-ci est le flux de rayonnement produit par les flammes. Nous n'allons pas faire la dérivation de l'expression pour ce flux. Il faut cependant savoir que les facteurs vent et pente sont modélisés dans ce flux. Ceux-ci sont analysés dans le chapitre 6. L'expression pour le flux radiatif reçu en un point  $\mathbf{M}$  en avant du front au moment  $t$  est donc

$$\mathcal{M}_r(\mathbf{M}, t) = \int_{\mathbf{P} \in \Omega_f} \varphi(\mathbf{P}) \xi(\mathbf{P}, \mathbf{M}) dS, \quad (4.5.1)$$

où  $\Omega_f$  est la zone en feu,

$$\xi(\mathbf{P}, \mathbf{M}) = \frac{K(\mathbf{P})}{r} \exp \left( -K(\mathbf{P})r \frac{(1 + \sin^2 \alpha_f)(1 - \sin \alpha_f \cos(\phi - \phi_f))}{\cos^2 \alpha_f} \right) \quad (4.5.2)$$

et

$$\varphi(\mathbf{P}) = \frac{\delta h_f K(\mathbf{P}) B}{\pi} T_f^4(\mathbf{P}). \quad (4.5.3)$$

On a également que  $r = \|\mathbf{MP}\|$  pour  $\mathbf{P} \in \Omega_f$  et que

$$\cos(\alpha_f) = \vec{\mathbf{V}}_{fl} \cdot \vec{\mathbf{n}} / \|\vec{\mathbf{V}}_{fl}\|, \quad (4.5.4)$$

$$\cos(\phi - \phi_f) = \frac{\vec{V}_{fl}^t}{\|\vec{V}_{fl}^t\|} \cdot \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|}, \quad (4.5.5)$$

où

$$\vec{V}_{fl} = \vec{v}_g + \vec{V} \quad (4.5.6)$$

$$\vec{v}_g = \sqrt{gh_f} \vec{z}$$

$$\vec{V} = V \left( \cos \varphi_v \vec{k} + \sin \varphi_v \vec{k}^\perp \right)$$

$$\vec{V}_{fl}^t = \vec{V}_{fl} - (\vec{V}_{fl} \cdot \vec{n}) \vec{n}.$$

Ici,  $\vec{n}$  est le vecteur normal à la surface au point  $P$ ,  $\vec{k}$  est la direction dans laquelle la pente augmente le plus rapidement au point  $P$  et  $\vec{k}^\perp$  est le vecteur normal à  $\vec{n}$  et  $\vec{k}$ .  $\vec{V}$  est la vitesse du vent ambiant,  $\vec{v}_g$  est la conduction naturelle des gaz.  $K(P)$  est le coefficient d'extinction au point  $P$ . Il vaut  $\frac{\sigma\beta}{4}$ . Les autres paramètres sont décrits dans l'annexe B. La dépendance de  $\mathcal{M}_\tau$  par rapport au temps n'apparaît pas explicitement dans l'expression. Elle est comprise dans  $\Omega_{feu}$ , le domaine en feu, qui lui varie dans le temps. Il est à noter que cette expression pour le flux radiatif est valide si  $h_f = O(\delta)$  et  $1/K = O(\delta)$ . Cette hypothèse évitera des problèmes plus loin.

#### 4.5.1. Adimensionnalisation

Margerit propose une adimensionnalisation pour le système d'équations qu'il obtient. Tout d'abord, rappelons que les trois inconnues sont la température  $T(x, y, t)$ , la charge de végétation  $P(x, y, t)$  et l'humidité  $H(x, y, t)$ . Toutes ces variables possèdent une certaine dimension. Afin, d'éviter certains problèmes causés par les dimensions, choisissons une longueur caractéristique  $L$ , par exemple, la dimension du domaine de simulation. Posons également le temps caractéristique  $\tau$  de la manière suivante :

$$\tau = \frac{P_r C_s (T_{ig} - T_a)}{\delta h_f B T_f^4 K_r^2}. \quad (4.5.7)$$

$P_r$  est la charge caractéristique (nous prendrons ici la charge maximale sur le domaine) et  $K_r$  le coefficient d'extinction caractéristique. Les autres paramètres



sont donnés plus haut. Voici la manière que l'on choisit d'adimensionnaliser :

$$r^* = \frac{r}{L} \quad (4.5.8)$$

$$t^* = \frac{t}{\tau} \quad (4.5.9)$$

$$T_p^* = \frac{T_p - T_a}{T_{ig} - T_a} \quad (4.5.10)$$

$$P^* = P/P_r \quad (4.5.11)$$

$$T_f^* = T_f/T_{fr} \quad (4.5.12)$$

$$K^*(x, y) = K(x, y)/K_r \quad (4.5.13)$$

$$v_r^* = \tau v_r. \quad (4.5.14)$$

On a aussi que

$$\begin{aligned} P_{ext}^* &= P_{ext}/P_r, & L_{ev}^* &= \frac{L_{ev}}{C_s(T_{inf} - T_a)} \\ h^* &= \frac{(T_{ig} - T_a)K_r h}{h_f a^2 B T_f^4}, & T_{ev}^* &= \frac{T_{ev} - T_a}{T_{inf} - T_a} \\ C_w^* &= \frac{C_w}{C_s} & \text{et } v_g^* &= \frac{V}{\sqrt{g h_f}}. \end{aligned}$$

Nous omettrons \* pour la suite afin d'alléger la notation.

#### 4.5.2. Système d'équations adimensionnalisées

Regardons le système d'équations adimensionnalisées qui décrit le comportement de la température  $T(\mathbf{M}, t)$ , de l'humidité  $H(\mathbf{M}, t)$  et de la charge végétale  $P(\mathbf{M}, t)$  en un certain point  $\mathbf{M}$  du domaine au temps  $t$ . On a également que  $P_{ini}(\mathbf{M})$  est la charge initiale, c'est-à-dire avant que celle-ci entre en combustion et  $H_{ini}(\mathbf{M})$  est l'humidité initiale avant l'évaporation de l'eau. Afin d'alléger le texte, nous n'écrirons pas systématiquement la dépendance de ces quantités initiales par rapport au point  $\mathbf{M}$ , mais il faut l'avoir en tête. Le système est défini comme suit :

i) **Zone en avant du front de flamme**,  $T(\mathbf{M}, t) < 1$  et  $P(\mathbf{M}, t) > P_{ext}$

$$\begin{cases} P_{ini}(1 + HC_w) \frac{\partial T(\mathbf{M}, t)}{\partial t} = \mathcal{M}_r(\mathbf{M}, t) - hT(\mathbf{M}, t), & \text{si } T(\mathbf{M}, t) < T_{ev} \\ -P_{ini}L_{ev} \frac{\partial H(\mathbf{M}, t)}{\partial t} = \mathcal{M}_r(\mathbf{M}, t) - hT(\mathbf{M}, t), & \text{si } T(\mathbf{M}, t) = T_{ev} \\ P_{ini} \frac{\partial T(\mathbf{M}, t)}{\partial t} = \mathcal{M}_r(\mathbf{M}, t) - hT(\mathbf{M}, t), & \text{si } T(\mathbf{M}, t) > T_{ev} \text{ et } H = 0. \end{cases} \quad (4.5.15a)$$

$$P(\mathbf{M}, t) = P_{ini} \quad (4.5.15b)$$

avec

$$\mathcal{M}_r(\mathbf{M}, t) = \int_{(\mathbf{P}) \in \Omega_{feu}} \varphi(\mathbf{P}) \xi(\mathbf{M}, \mathbf{P}) ds \quad (4.5.15c)$$

où

$$\varphi(\mathbf{P}) = \frac{1}{\pi} T_f^4(\mathbf{P}) \quad (4.5.15d)$$

et

$$\xi(\mathbf{M}, \mathbf{P}) = \frac{K}{\|\overrightarrow{\mathbf{PM}}\|} \exp \left( -K \|\overrightarrow{\mathbf{PM}}\| \frac{(1 + \sin^2 \alpha_f)(1 - \sin \alpha_f \cos(\phi - \phi_f))}{\cos^2 \alpha_f} \right) \quad (4.5.15e)$$

Les angles  $\alpha_f$  et  $\phi_f$  sont trouvés grâce aux relations suivantes :

$$\cos(\alpha_f) = \overrightarrow{\mathbf{V}}_{fl} \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}} / \|\overrightarrow{\mathbf{V}}_{fl}\|, \quad (4.5.15f)$$

$$\cos(\phi - \phi_f) = \frac{\overrightarrow{\mathbf{V}}_{fl}}{\|\overrightarrow{\mathbf{V}}_{fl}\|} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathbf{PM}}}{\|\overrightarrow{\mathbf{PM}}\|}, \quad (4.5.15g)$$

où

$$\overrightarrow{\mathbf{V}}_{fl} = \overrightarrow{\mathbf{v}}_g + \overrightarrow{\mathbf{V}} \quad (4.5.15h)$$

$$\overrightarrow{\mathbf{v}}_g = \overrightarrow{\mathbf{z}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{V}} = v_g \left( \cos \varphi_v \overrightarrow{\mathbf{k}} + \sin \varphi_v \overrightarrow{\mathbf{k}}^\perp \right)$$

$$\overrightarrow{\mathbf{V}}_{fl}^t = \overrightarrow{\mathbf{V}}_{fl} - (\overrightarrow{\mathbf{V}}_{fl} \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}}) \overrightarrow{\mathbf{n}}$$

ii) **Zone en feu**,  $T(\mathbf{M}, t) \geq 1$  et  $P(\mathbf{M}, t) > P_{ext}$

$$T(\mathbf{M}, t) = 1, \quad (4.5.15i)$$

$$\frac{\partial P(\mathbf{M}, t)}{\partial t} = -v_r P_{ini}, \quad (4.5.15j)$$

où

$$v_r = \tau A_s \exp(-E_s/RT_f). \quad (4.5.15k)$$

iii) Zone brûlée,  $P(\mathbf{M}, t) \leq P_{ext}$

$$T(\mathbf{M}, t) = 0, \quad (4.5.15l)$$

$$P(\mathbf{M}, t) = P_{ext} \quad (4.5.15m)$$

Il est à noter que l'on suppose que la perte convective  $h$  est nulle pour le reste de ce mémoire. Cette hypothèse est utilisée dans [10]. La signification des différents paramètres est expliquée dans l'annexe B. Ce système est aussi accompagné de conditions initiales, c'est-à-dire  $T(\mathbf{M}, 0) = T_{ini}(\mathbf{M})$ ,  $H(\mathbf{M}, 0) = H_{ini}(\mathbf{M})$  et  $P(\mathbf{M}, 0) = P_{ini}(\mathbf{M})$ .

## Chapitre 5

---

### MODÈLE DE MARGERIT DANS LE CAS UNIDIMENSIONNEL

Le système d'équations 4.5.15 que nous avons obtenu dans le chapitre précédent nous permet de décrire la dynamique du front du point de vue gigascopique dans un domaine bidimensionnel. Afin de simplifier la tâche de l'étude du modèle, nous nous attardons, dans ce chapitre, au cas d'un front unidimensionnel. Il s'agit d'une étape préliminaire habituellement effectuée dans l'analyse de différents modèles.

#### 5.1. ÉTUDE DU FRONT UNIDIMENSIONNEL

##### 5.1.1. Motivation

Nous sommes intéressés à extraire une vitesse de propagation du front. Cela nous permettrait, entre autres, de faire des comparaisons avec les autres modèles et d'utiliser la méthode *Level-Set*. Nous allons manipuler le système afin d'obtenir la vitesse qui nous intéresse. Nous supposons qu'en chaque point du front, celui-ci est proche d'un front plan infini et où la zone en combustion a une largeur  $l_f$  (voir figures 5.1.1 et 5.1.2).

##### 5.1.2. Simplification du flux radiatif

On suppose qu'à cette échelle, la végétation est uniforme. Dans ce cas,  $P_{ini}(\mathbf{M}) = 1$  et  $H_{ini}(\mathbf{M}) = \text{constante}$  et ce en tout point  $\mathbf{M}$  du domaine non brûlé. Dans ce cas, il est facile de simplifier l'expression du flux radiatif  $\mathcal{M}_r(\mathbf{M}, t)$  à l'aide des

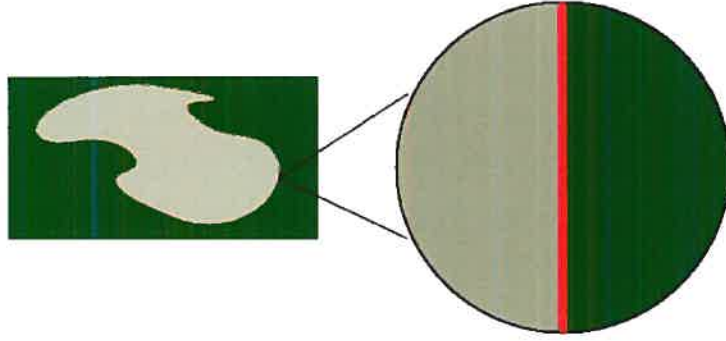


FIG. 5.1.1. Agrandissement en un point du front.

coordonnées polaires. En ignorant les facteurs pente et vent, qui seront facilement

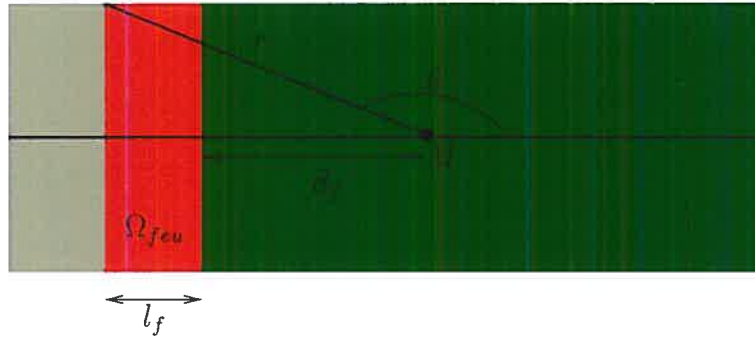


FIG. 5.1.2. Changement de système de coordonnées.

incorporés par la suite, nous avons que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_r(\mathbf{M}, t) &= \int_{\mathbf{P} \in \Omega_{feu}} \varphi(\mathbf{P}) \xi(\mathbf{M}, \mathbf{P}) dS \\
 &= \int_{\mathbf{P} \in \Omega_{feu}} \frac{K}{r} \exp(-Kr) \frac{1}{\pi} T_f^4 dS \\
 &= 2 \frac{KT_f^4}{\pi} \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \int_{\alpha}^{\pi} \int_{\frac{-d_f}{\cos \theta}}^{\frac{-d_f - l_f}{\cos \theta}} \exp(-Kr) dr d\theta \\
 &= -2 \frac{T_f^4}{\pi} \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \int_{\alpha}^{\pi} \left[ \exp\left(K \frac{d_f + l_f}{\cos \theta}\right) - \exp\left(K \frac{d_f}{\cos \theta}\right) \right] d\theta. \quad (5.1.1)
 \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale est très bien approchée avec l'aide de méthodes numériques. Nous avons donc une équation relativement simple pour le flux radiatif. Avec des conditions de végétation uniforme, nous nous retrouvons avec un flux

$\mathcal{M}_r$  qui dépend essentiellement de  $d_f$  (distance entre  $M$  et le début du front) et de la largeur du front  $l_f$ . N'oublions pas que ces paramètres varient dans le temps.

## 5.2. VITESSE STATIONNAIRE

Notre but est d'obtenir la vitesse du front. En supposant que les conditions sont constantes au niveau macroscopique, nous nous attendons à ce que la vitesse converge vers une valeur limite. Dans cette limite, les profils de la température, de l'humidité et de la charge ne varient pas dans le temps. C'est ce que l'on nommera la vitesse stationnaire.

### 5.2.1. Équations stationnaires

On suppose que les variables  $T(x, t)$ ,  $H(x, t)$  et  $P(x, t)$  sont des fonctions d'une seule variable  $u = x - vt$  où  $v$  est la vitesse de propagation du front. Substituons le tout dans le système d'équations 4.5.15. Examinons tout d'abord la forme des profils auxquels on s'attend.

Nous savons d'après le système que six zones sont à considérer. Dans chacune d'elles, il n'y a qu'une seule variable qui varie. Dans ce qui suit, le front se déplace de gauche à droite.

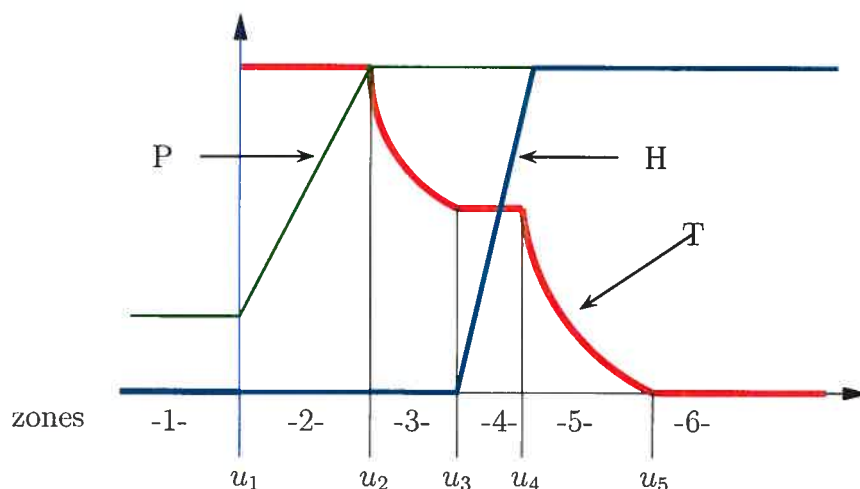


FIG. 5.2.1. Graphique des différentes zones du modèle.

**Zone 6:** Cette zone est celle où rien ne se produit. Elle est très loin de la zone en feu. En réalité, elle est à l'infini, car il y a toujours un petit

flux de chaleur qui atteint la végétation, mais il devient très rapidement négligeable.

**Zone 5:** Ici, la température augmente vers la température d'évaporation de l'eau. Les autres variables restent constantes à leur valeur initiale.

**Zone 4:** Dans cette zone, l'eau contenue dans la végétation s'évapore. La température est constante,  $T(u) = T_{ev}$ . La charge reste à 1.

**Zone 3:** Ici, la température augmente vers la température de combustion après l'évaporation de l'eau. Il n'y a plus d'humidité et la charge reste à la charge initiale qui vaut 1, car la végétation est uniforme.

**Zone 2:** C'est la zone en feu. La charge de combustible y diminue, la température est égale à 1 et il n'y a plus d'humidité.

**Zone 1:** Dans cette zone, il n'y a rien qui se produit. C'est la zone brûlée ;  $T(u) = 0$ ,  $H(u) = 0$  et  $P(u) = P_{ext}$ .

Nous notons par  $u_i = x_i - vt$  la fin de la zone  $i$  au temps  $t$ ,  $x_i$  est donc la position initiale de la fin de chacune des zones. Nous avons que  $u_2$  correspond à la position du front. Maintenant, en supposant que  $v$  est constant dans le temps, nous obtenons donc le système d'équations différentielles algébriques :

**Zone 1 :**  $u < u_1$

$$T(u) = 0, \quad (5.2.1a)$$

$$H(u) = 0, \quad (5.2.1b)$$

$$P(u) = P_{ext}, \quad (5.2.1c)$$

**Zone 2 :**  $u_1 < u < u_2$

$$T(u) = 1, \quad (5.2.1d)$$

$$H(u) = 0, \quad (5.2.1e)$$

$$-v \frac{dP(u)}{du} = -\nu_r P_{ini}, \quad (5.2.1f)$$

**Zone 3** :  $u_2 < u < u_3$

$$-vP_{ini}\frac{dT(u)}{du} = \mathcal{M}_r(u, l_f), \quad (5.2.1g)$$

$$H(u) = 0, \quad (5.2.1h)$$

$$P(u) = P_{ini}, \quad (5.2.1i)$$

**Zone 4** :  $u_3 < u < u_4$

$$T(u) = T_{ev}, \quad (5.2.1j)$$

$$vL_{ev}P_{ini}\frac{dH(u)}{du} = \mathcal{M}_r(u, l_f), \quad (5.2.1k)$$

$$P(u) = P_{ini}, \quad (5.2.1l)$$

**Zone 5** :  $u_4 < u < u_5$

$$-vP_{ini}(1 + H_{ini}C_w)\frac{dT(u)}{du} = \mathcal{M}_r(u, l_f), \quad (5.2.1m)$$

$$H(u) = H_{ini}, \quad (5.2.1n)$$

$$P(u) = P_{ini}, \quad (5.2.1o)$$

**Zone 6** :  $u_5 < u$

$$T(u) = 0, \quad (5.2.1p)$$

$$H(u) = H_{ini}, \quad (5.2.1q)$$

$$P(u) = P_{ini}. \quad (5.2.1r)$$

Les conditions aux frontières des zones assurent la continuité des variables. Il ne reste plus qu'à trouver la valeur de  $v$ .

### 5.2.2. Méthode de flux constant

La méthode de flux constant consiste à intégrer le flux radiatif  $\mathcal{M}_r(d_f, l_f)$  de  $u = u_2$  à l'infini. Ici, nous avons que  $d_f = u - u_2$ . Ceci nous donne le flux de



chaleur total libéré par le front d'une largeur fixe. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \int_{u_2}^{\infty} \mathcal{M}_r(u - u_2, l_f) du &= \int_{u_2}^{u_3} -v P_{ini} \frac{dT}{du} du \\
 &+ \int_{u_3}^{u_4} v L_{ev} P_{ini} \frac{dH}{du} du \\
 &+ \int_{u_4}^{\infty} -v P_{ini} (1 + H_{ini} C_w) \frac{dT}{du} du \\
 &= -v P_{ini} [T(u_3) - T(u_2)] \\
 &+ v P_{ini} L_{ev} [H(u_4) - H(u_3)] \\
 &- v P_{ini} (1 + H_{ini} C_w) [T(\infty) - T(u_4)] \\
 &= v P_{ini} ((1 - T_{ev}) + L_{ev} H_{ini} + (1 + C_w H_{ini}) T_{ev}).
 \end{aligned}$$

On obtient l'équation pour la vitesse

$$v = \frac{\int_{u_2}^{\infty} \mathcal{M}_r(u - u_2, l_f) du}{P_{ini}((1 - T_{ev}) + L_{ev} H_{ini} + (1 + C_w H_{ini}) T_{ev})}. \quad (5.2.2)$$

Cette forme pour la vitesse est intéressante puisqu'elle est sous la forme de l'expression que nous avons discutée dans le chapitre 1

$$v = \frac{\text{flux de chaleur du front de flamme}}{\text{chaleur requise pour l'inflammation du combustible}}. \quad (5.2.3)$$

Ici, le numérateur représente la chaleur produite par le front et le dénominateur est celle dont a besoin la végétation pour s'enflammer. Malheureusement, cette forme ne nous permet pas de trouver la vitesse stationnaire, car on ne connaît pas  $l_f$  a priori.

### 5.2.3. Méthode de résolution de la zone 2

Une autre façon d'obtenir la vitesse  $v$  est de résoudre les équations de la zone 2. À cet endroit,  $T = 1$  et l'humidité est à zéro. Il reste l'évolution de la charge qui est décrite par

$$-v \frac{dP(u)}{du} = -\nu_r P_{ini}.$$

Avec les conditions aux bords, c'est-à-dire  $P(u_1) = P_{ext}$  et  $P(u_2) = P_{ini}$ , nous avons que

$$v = \frac{P_{ini}\nu_r(u_2 - u_1)}{P_{ini} - P_{ext}} = \frac{P_{ini}\nu_r l_f}{P_{ini} - P_{ext}}. \quad (5.2.4)$$

Une fois de plus, la vitesse dépend de la largeur du front. Nous avons donc obtenu un système formé des équations 5.2.2 et 5.2.4 avec deux inconnues  $v$  et  $l_f$ .

#### 5.2.4. Obtention de la vitesse et de la largeur stationnaire

La méthode la plus simple pour trouver  $v$  et  $l_f$  est d'utiliser une méthode de point fixe. Décrivons les étapes de cette méthode.

- (1) Obtenir une approximation de la vitesse du front ( $v_0$ ). Nous utilisons la vitesse fournie par le modèle de Rothermel.
- (2) Utiliser l'équation 5.2.4 afin de calculer la largeur correspondante à  $v_0$ , c'est-à-dire

$$l_f = \frac{P_{ini} - P_{ext}}{P_{ini}\nu_r} v_0. \quad (5.2.5)$$

- (3) Calculer  $v$  avec l'équation 5.2.2 en utilisant  $l_f$  obtenue à l'étape précédente.
- (4) Recommencer les étapes 2 et 3 en remplaçant  $v_0$  par la vitesse trouvée en 3. On itère ce processus jusqu'à convergence.

Le tableau 5.2.1 montre les itérations de point fixe pour trois différents jeux de données différents. Le jeu # 1 est  $\sigma = 8130m^{-1}$ ,  $\rho_p = 466kg/m^3$ ,  $H_{ini} = 0.007$  et  $P_{ini} = 4kg/m^2$ . Pour les jeux #2 et #3, nous ajoutons respectivement une pente avec un angle d'élévation de  $\pi/16$  et un vent de  $1m/min$ . Ces deux facteurs seront introduits dans la section 5.4.1. Nous remarquons que la méthode converge très

Itérations	$v$ jeux # 1	$v$ jeux #2	$v$ jeux # 3
0	2.1692	2.1692	2.1692
1	1.9507	2.3531	2.3830
2	1.9507	2.3531	2.3830

TAB. 5.2.1. Itérations de point fixe pour différents jeux de données.

La vitesse est en  $m/min$ .

rapidement. Il reste cependant à vérifier si ces réponses correspondent effectivement à des profils stationnaires.

### 5.3. VÉRIFICATION DE LA STATIONNARITÉ

Ici, nous vérifions dynamiquement que le profil stationnaire trouvé est stable. Pour ce faire, nous résolvons le système d'équations 4.5.15 avec comme condition initiale le profil stationnaire.

#### 5.3.1. Problème lors de la résolution avec la méthode d'Euler avant

Dans [10], un schéma d'Euler avant est utilisé afin de résoudre le système 4.5.15. Cette méthode numérique est conçue pour résoudre une équation différentielle de la forme  $y' = f(t, y)$  qui possède une condition initiale, habituellement notée  $y(0) = y_0$ . La méthode d'Euler consiste à approximer la solution à des temps discrets  $t_n$ . Dans notre cas, nous avons pris un pas de temps fixe,  $h$ . Ainsi,  $t_n = nh$ . En connaissant une approximation  $y_n$  de la solution au temps  $t_n$ , on peut trouver une approximation de la solution  $y_{n+1}$  à  $t_{n+1}$  de la manière suivante :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad (5.3.1)$$

où  $y_n$  est la solution numérique au temps  $t_n$ . Nous avons essayé d'utiliser cette méthode pour résoudre le système différentiel 4.5.15 et le problème suivant est apparu. Lorsque nous diminuons le pas de temps, la vitesse du front augmente. La figure 5.3.1 représente la propagation du même front initial, mais résolue avec deux pas de temps différents, tous deux assez petits. L'explication est très simple et pour bien la comprendre, regardons la figure 5.3.2. Supposons que pour un temps  $t$ , le point  $i - 1$  est en feu et que le point  $i$  est près de l'être. Résolvons le système d'équations différentielles par la méthode d'Euler avec un pas de temps de  $h$  et un pas de temps deux fois plus grand, soit de  $2h$ . À  $t + h$ , le point  $i$  entre en combustion ce qui augmente la largeur du front. Ceci entraîne que le flux de chaleur,  $\mathcal{M}_r$ , devient plus grand. Ainsi, le flux de chaleur moyen sur l'intervalle de temps  $[t, t + 2h]$  est plus grand lorsque l'on effectue deux pas plutôt qu'un. En conséquence, cela permet, par exemple, au point  $i + 1$  d'entrer en combustion dans un cas et non dans l'autre. Lorsque le temps avance, cette différence s'accumule

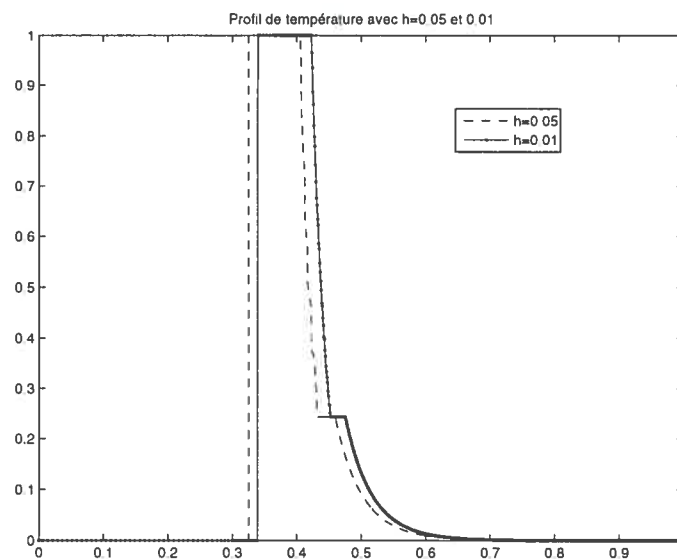


FIG. 5.3.1. Profil de la température pour des pas de temps de 0.01 et 0.05 après un certain temps.

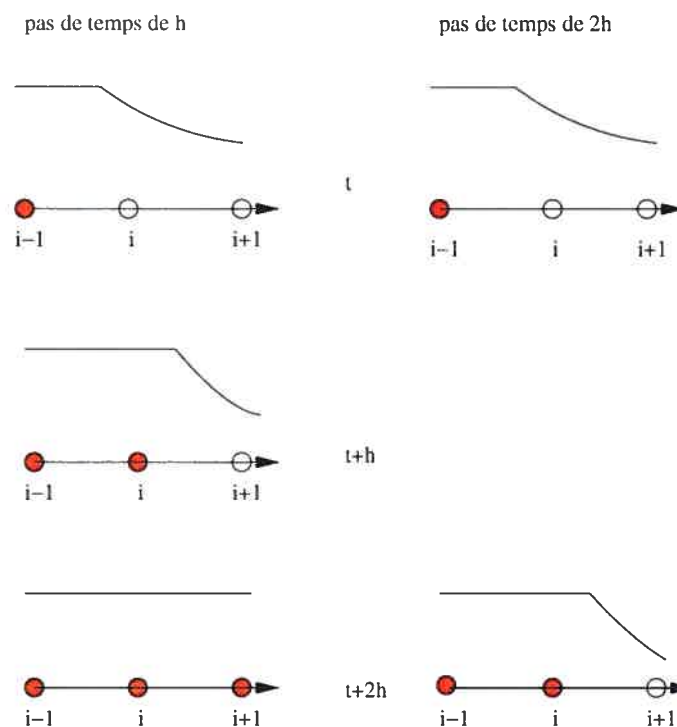


FIG. 5.3.2. Graphique montrant le profil de température pour deux pas de temps différents avec Euler avant. On y voit l'explication du problème.

de façon significative, ce qui rend la vitesse dépendante du pas de temps utilisé.

Ce manque de convergence rend impossible l'utilisation de ce type de schéma afin de valider les profils stationnaires.

### 5.3.2. Solveurs de *Matlab*

Au départ, notre but n'était pas d'utiliser un schéma d'Euler à cause de sa faible convergence. Nous avons alors utilisé *ode23* qui est un solveur explicite à pas adaptatifs. Ce solveur utilise des méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2 et 3. Lors du calcul, un message d'erreur nous indique que des points se remettent en combustion après leur extinction. En affichant quelques données, on s'aperçoit du problème. Voici ces données :

eval	$T(x_1)$	$T(x_2)$	$T(x_3)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$
395	0.8905	1.00	1.00	0.100	0.0981
396	0.8726	0.9465	1.00	0.100	0.1004

TAB. 5.3.1. Tableau de certaines données fournies par *ode23*

Les deux lignes montrent deux évaluations consécutives des fonctions  $T$  et  $P$  au trois points initialement en combustion. La première ne donne rien d'anormal :  $T(x_1) < 1$  et  $P(x_1) = P_{ext} = 0.1$  ce qui signifie que  $x_1$  est brûlé,  $T(x_2) = 1$  et  $P(x_2) < P_{ext}$  donc  $x_2$  vient tout juste d'arrêter de brûler. À l'évaluation suivante, le fait que  $P(x_2)$  redevient plus grand que  $P_{ext}$  entraîne que le point se remet en combustion. Cela amène des problèmes dans les changements d'état du point. Pour comprendre ce qui se produit, utilisons un schéma de Runge-Kutta d'ordre 2. Cette méthode s'applique lorsque l'on a une équation différentielle de la forme  $y' = f(t, y)$  où l'on connaît la solution initialement,  $y(t = 0) = y_0$ . Tout comme la méthode d'Euler, Runge-Kutta nous permet de trouver la solution au temps discret  $t_{n+1}$  en connaissant la solution au temps  $t_n$ . La différence avec le schéma d'Euler est au niveau de la précision de l'approximation de la solution. On n'entrera pas dans les détails, mais tout ce qui est important de savoir ici est

l'algorithme de cette méthode que voici :

$$y_{n+1}^* = y_n + hf(t_n, y_n) \quad (5.3.2)$$

$$f_n^* = f(t_{n+1}, y_{n+1}^*) \quad (5.3.3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_n^*). \quad (5.3.4)$$

Cela signifie que pour trouver la solution au temps  $t_{n+1}$ , on effectue tout d'abord une prédiction de la solution au temps  $t_{n+1}$  (notée  $y_{n+1}^*$ ). Par la suite, on calcule  $f_n^*$  qui correspond à l'approximation de la dérivée de la courbe en  $t_{n+1}$ . Finalement, on trouve la solution  $y_{n+1}$  en ajoutant à  $y_n$  la moyenne des dérivées calculées en  $t_n$  et  $t_{n+1}$  multiplié par le pas de temps  $h$ . Dans notre cas, le problème survient lorsque l'on calcule la pente en  $t_{n+1}$ . En prévoyant la solution au temps  $t_{n+1}$ , on se trouve à changer le point d'état. Par exemple, dans la table 5.3.1, le point  $x_2$  est encore en combustion au temps  $t_n$ , mais l'approximation  $y_{n+1}^*$  indique qu'au pas suivant, le point est brûlé. À ce moment,  $dP_n^*/dt = 0$  (approximation de la dérivée de la charge) et  $dT_n^*/dt$  est négative afin de ramener la température à 0. Ainsi,  $T$  diminue, mais  $P$  ne varie pas comme il devrait puisque sa pente est diminuée de moitié à cause du schéma. Ce qui se produit alors est que la température décroît indiquant que la combustion arrête, mais la charge ne diminue pas assez pour atteindre  $P_{ext}$ , ce qui dit au solveur que ce point n'a pas été brûlé. Ainsi, le solveur remet ce point en combustion le pas suivant. L'erreur est donc commise en essayant de prédire le pas suivant à cause des discontinuités dans les pentes. Il sera alors impossible de résoudre ce système avec des solveurs à plusieurs pas.

Pour ce qui est de l'utilisation d'un solveur implicite, la grosseur des domaines entraîne un temps de calcul énorme. C'est donc une avenue moins envisageable. Il existe néanmoins une façon très simple de résoudre le problème. Il s'agit de reformuler le système d'équations 4.5.15, tel que décrit dans la section suivante.

### 5.3.3. Méthode de prolongement

L'analyse des schémas explicites nous a montré que le problème se situait au niveau des discontinuités dans les pentes. Les schémas habituels ne sont pas en

mesure de résoudre ce type de problèmes. Le but ici est de contourner la présence de ces discontinuités. La méthode proposée consiste à définir des variables différentes dans chacune des zones où il y a une discontinuité. Pour la température, on la divise en deux fonctions distinctes :  $T^1$  et  $T^2$ .  $T^1$  est l'évolution de  $T$  si  $H > 0$  et  $T^2$  est celle lorsqu'il n'y a plus d'humidité. Pour  $H$  et  $P$ , il n'y a pas de problème. Par la suite, on peut réécrire le système d'équations 4.5.15 sous une forme quasi équivalente où il n'y plus d'arrêt brusque dans l'évolution d'une certaine quantité. Nous indexons les variables de ce système par  $*$  afin de voir la différence entre les deux. Ce système pour chaque point du domaine est

$$\begin{cases} \frac{dT_*^1}{dt} = \mathcal{M}_r / (P_*(1 + H_*C_w)), \\ \frac{dH_*}{dt} = -0.5(\sigma_p(T_*^1 - T_{ev}) + 1)\mathcal{M}_r / (P_*L_{ev}), \\ \frac{dT_*^2}{dt} = 0.5(1 - \sigma_m(H_*))\mathcal{M}_r / P_*, \\ \frac{dP_*}{dt} = -0.5(\sigma_p(T_*^2 - 1) + 1)v_r P_{ini}, \end{cases} \quad (5.3.5)$$

où

$$\sigma_m(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (5.3.6)$$

et

$$\sigma_p(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \quad (5.3.7)$$

Les fonctions  $\sigma_p$  et  $\sigma_m$  sont présentes afin de signaler le départ de l'évolution de la fonction. Avec des conditions initiales cohérentes, nous n'aurons plus le problème qui est survenu avec *ode23*. On pourra retrouver  $T$ ,  $H$  et  $P$  en fonction du temps grâce aux relations suivantes :

$$T(x) = \begin{cases} T_*^1, & \text{si } H_* > 0 \\ T_{ev} & \text{si } H_* > 0 \text{ et } T_*^1 > T_{ev} \\ T_*^2, & \text{si } H_* \leq 0 \text{ et } T_*^2 \leq 1 \\ 1, & \text{si } P_* \geq P_{ext} \text{ et } T_*^2 > 1 \\ T_a, & \text{si } P_* < P_{ext}, \end{cases} \quad (5.3.8)$$

$$H(x) = \begin{cases} H_{ini}, & \text{si } T_*^1 < T_{ev} \\ H_*, & \text{si } T_*^1 \geq T_{ev} \text{ et } H_* > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.3.9)$$

et

$$P(x) = \begin{cases} P_{ini}, & \text{si } T_*^2 < 1 \\ P_*, & \text{si } T_*^2 \geq 1 \text{ et } P_* >_{ext} \\ P_{ext} & \text{sinon .} \end{cases} \quad (5.3.10)$$

Nous obtenons ainsi la solution du système, mais avant, il nous faut une condition initiale pour  $T$ ,  $H$  et  $P$  qui correspond au profil stationnaire.

#### 5.3.4. Initialisation des profils stationnaires

Pour obtenir les profils initiaux de  $T$ ,  $H$  et  $P$ , nous utilisons le système 5.2.1. En connaissant  $l_f$ , nous pouvons déterminer les profils des variables dans les zones 1 et 2. Par la suite, nous pouvons intégrer l'équation de la température de la zone 3 jusqu'à ce que celle-ci atteigne la  $T_{ev}$ . Nous trouvons alors  $u_3$ . Nous reprenons le même processus dans la zone 4 et la zone 5 en intégrant respectivement l'équation de  $H$  jusqu'à ce qu'il atteigne  $H_{ini}$  et l'équation de  $T$  jusqu'à  $T = 0$ . Cela nous permet de reconstituer le profil des différentes variables, profils qui devraient être stationnaires.

#### 5.3.5. Dynamique stationnaire

Nous avons besoin de résoudre le système 4.5.15 afin de vérifier si le profil calculé avec  $l_f$  correspondait à une dynamique stationnaire. Les paramètres utilisés pour cette simulation sont fournis dans la table 5.3.2. Il est à noter que  $l_f = 0.445$ .

La figure 5.3.3 montre la largeur des différentes zones en fonction du temps. Nous voyons qu'il n'y a pas de changement véritable au cours du temps. Ainsi, les résultats obtenus grâce à la méthode de point fixe correspondent bien à une dynamique de profils stationnaires.



$C_w = 1.7417$	$L_{ev} = 3.1250$	$T_{inf} = 1$
$K = 20$	$P_{ext} = 0.1$	$T_f = 0.5$
$\tau = 306.1924$	$T_{ev} = 0.2433$	$v_r = 1.2572$
$H_{ini} = 0.007$		

TAB. 5.3.2. Tableau des différents paramètres adimensionnalisés utilisés pour la vérification de la stationnarité.

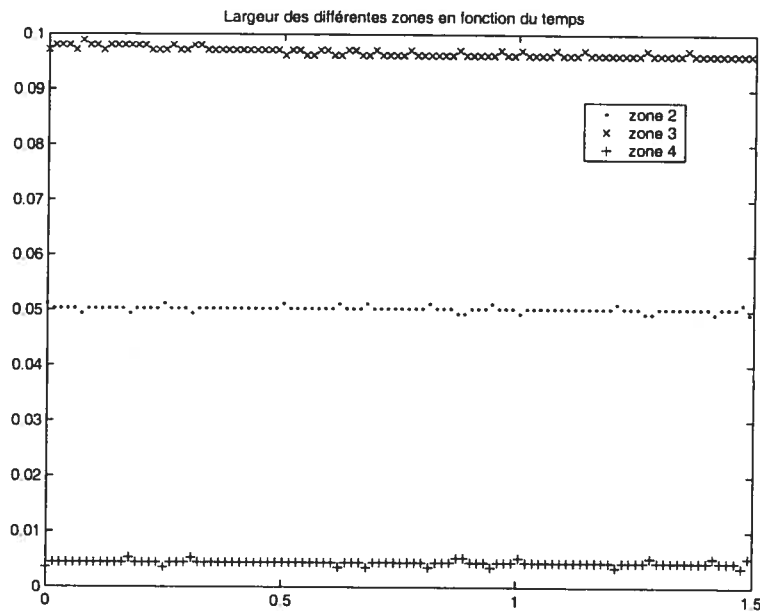


FIG. 5.3.3. Largeur des différentes zones en fonction du temps. La vitesse est environ de 0.1 en variable adimensionnalisée.

#### 5.4. AJOUT DES FACTEURS PENTE ET VENT

Nous sommes maintenant en mesure de trouver la vitesse de propagation d'un front de flamme pour un terrain plat et sans vent. Pour intégrer les facteurs pente et vent dans le calcul de la vitesse, il suffit de changer le flux radiatif  $\mathcal{M}_r$ . Nous examinons ici la simplification du flux dans le cas unidimensionnel avec pente et vent.

##### 5.4.1. Flux radiatif général

L'effet du vent et de la pente sur la vitesse de propagation s'exprime dans le flux radiatif  $\mathcal{M}_r$ . Expliquons rapidement les divers paramètres utilisés afin de

bien modéliser ces facteurs. Selon les équations fournies par Margerit, on a :

$$\mathcal{M}_r(\mathbf{M}, t) = \int_{\mathbf{P} \in \Omega_{feu}} \varphi(\mathbf{P}) \xi(\mathbf{M}, \mathbf{P}) dS \quad (5.4.1)$$

où

$$\varphi(\mathbf{P}) = \frac{T_f^4}{\pi} \quad (5.4.2)$$

et

$$\xi(\mathbf{M}, \mathbf{P}) = \frac{K(\mathbf{M})}{\|\overrightarrow{\mathbf{MP}}\|} e^{\left( -K(\mathbf{M}) \|\overrightarrow{\mathbf{MP}}\| \frac{(1 + \sin^2 \alpha_f)(1 - \sin \alpha_f \cos(\phi - \phi_f))}{\cos^2 \alpha_f} \right)} \quad (5.4.3)$$

Les angles  $\alpha_f$  et  $\phi_f$  sont donnés par les relations suivantes :

$$\cos(\alpha_f) = \overrightarrow{\mathbf{V}}_{fl} \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}} / \|\overrightarrow{\mathbf{V}}_{fl}\|, \quad (5.4.4)$$

$$\cos(\phi - \phi_f) = \frac{\overrightarrow{\mathbf{V}}_{fl}^t}{\|\overrightarrow{\mathbf{V}}_{fl}^t\|} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathbf{PM}}}{\|\overrightarrow{\mathbf{PM}}\|}, \quad (5.4.5)$$

où

$$\overrightarrow{\mathbf{V}}_{fl} = \overrightarrow{\mathbf{v}}_g + \overrightarrow{\mathbf{V}} \quad (5.4.6)$$

$$\overrightarrow{\mathbf{v}}_g = \overrightarrow{\mathbf{z}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{V}} = V \left( \cos \varphi_v \overrightarrow{\mathbf{k}} + \sin \varphi_v \overrightarrow{\mathbf{k}}^\perp \right)$$

$$\overrightarrow{\mathbf{V}}_{fl}^t = \overrightarrow{\mathbf{V}}_{fl} - (\overrightarrow{\mathbf{V}}_{fl} \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}}) \overrightarrow{\mathbf{n}}.$$

Pour expliquer les différents paramètres des équations précédentes, prenons le plan tangent à la topographie au point  $\mathbf{P}$  qui est en feu. Notons la fonction de topographie par  $G(x, y)$ . Celle-ci représente la hauteur du terrain en un point  $(x, y)$ . À ce moment,  $\overrightarrow{\mathbf{k}}$  correspond à la direction du gradient de cette fonction  $G$ ,  $\overrightarrow{\mathbf{n}}$  est le vecteur normal de ce plan ayant une composante  $z$  positive et  $\overrightarrow{\mathbf{k}}^\perp$  complète la base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$ .  $\overrightarrow{\mathbf{V}}$  est le vecteur représentant le vent local, tangent à la surface.  $\overrightarrow{\mathbf{v}}_g$  est une correction du vent local déterminée par la convection naturelle produite par le front. Nous avons que l'angle  $\alpha_f$  est l'angle d'inclinaison de la flamme (qui est en direction  $D$ ) par rapport à la normale du

à l'axe perpendiculaire au front passant par le point  $M$ . On obtient alors que

$$\mathcal{M}_r(M, t) = -\frac{KT_f^4}{\pi} \lim_{(\alpha, \gamma) \rightarrow (\frac{\pi}{2}^+, \frac{3\pi}{2}^+)} \int_{\alpha}^{\gamma} \frac{1}{K\Lambda} \left[ e^{K\Lambda \frac{d_f + l_f}{\cos \theta}} - e^{K\Lambda \frac{d_f}{\cos \theta}} \right] d\theta. \quad (5.4.8)$$

Par contre,  $\Lambda$  est en fonction de  $\theta$ , car nous avons que

$$\overrightarrow{PM} = -r(\cos \theta \vec{k} + \sin \theta \vec{k}^{\perp}). \quad (5.4.9)$$

Ici, le signe négatif provient du fait que l'origine en coordonnées polaires est le point  $M$  comme l'illustre les figures 5.4.2 et 5.4.3. Ainsi,

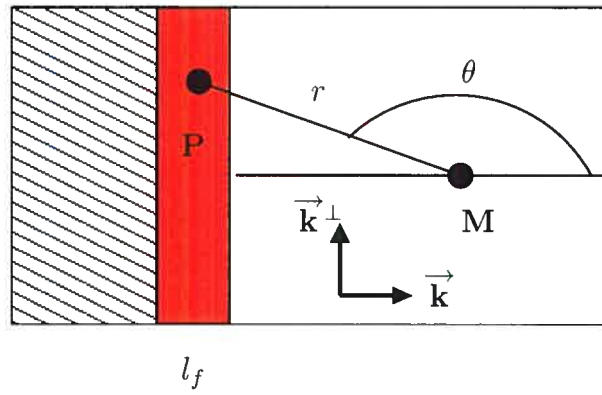


FIG. 5.4.2. Illustration des variables pour  $\theta_{el} > 0$ .

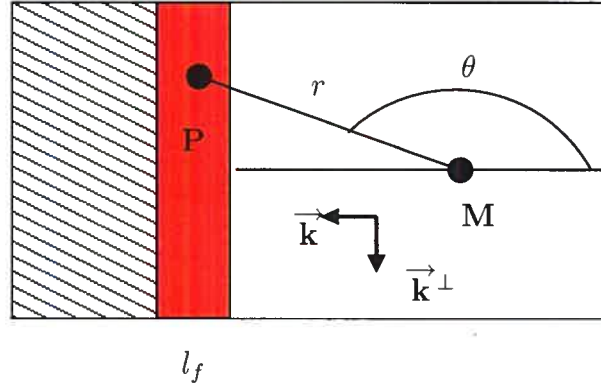
$$\cos(\varphi - \varphi_f) = \frac{\vec{V}_{fl}^t}{\|\vec{V}_{fl}^t\|} \cdot (-\cos \theta \vec{k} - \sin \theta \vec{k}^{\perp}),$$

d'où la dépendance de  $\Lambda$  en  $\theta$ . Nous pouvons calculer les intégrales dans 5.4.8 avec l'aide de la fonction *quad* de *Matlab*.

Pour le cas où  $\theta_{el}$  serait négatif,  $\vec{k}$  et  $\vec{k}^{\perp}$  changent de direction comme le montre la figure 5.4.3. Cela n'affecte pas la forme du flux, mais seulement la valeur de  $\Lambda$ .

### 5.4.3. Obtention des différents vecteurs unitaires

Le but que nous avons au départ était d'obtenir la vitesse normale en chacun des points du front. Nous avons supposé qu'en zoomant sur un point en feu, l'allure est un front plat de longueur infinie avec une végétation uniforme. Nous supposons également que la topographie correspond à un plan. Ainsi, nous pouvons trouver la

FIG. 5.4.3. Illustration des variables pour  $\theta_{el} < 0$ .

vitesse, ce qui nous permettra d'utiliser la méthode *Level-Set*. Il reste maintenant à trouver les différentes informations nécessaires selon le front. Ainsi, pour un point du front, nous avons que sa direction normale est  $\vec{N} = \nabla\phi/|\nabla\phi|$ , où  $\phi$  est la fonction *Level-Set*. Nous pourrions facilement trouver  $\theta_{el}$  si nous connaissons la fonction de topographie  $G$ . Grâce à ces relations, nous avons que

$$\vec{k} = \text{signe}(\theta_{el}) \left( \frac{\phi_x}{|\nabla\phi|} \cos \theta_{el}, \frac{\phi_y}{|\nabla\phi|} \cos \theta_{el}, \sin \theta_{el} \right), \quad (5.4.10)$$

$$\vec{k}^\perp = \text{signe}(\theta_{el}) \left( -\frac{\phi_y}{|\nabla\phi|}, \frac{\phi_x}{|\nabla\phi|}, 0 \right), \quad (5.4.11)$$

$$\vec{n} = \left( -\frac{\phi_x}{|\nabla\phi|} \sin \theta_{el}, -\frac{\phi_y}{|\nabla\phi|} \sin \theta_{el}, \cos \theta_{el} \right). \quad (5.4.12)$$

La fonction *signe* est présente, car  $\vec{k}$  correspond à la direction de l'élévation maximale. Ainsi, si le front descend la pente,  $\vec{k}$  est dans la direction opposée à la propagation.

Nous possédons maintenant, la façon d'obtenir la vitesse normale de propagation du front. Par contre, certaines quantités nécessaires à ce calcul ne sont malheureusement pas disponibles. Le prochain chapitre portera sur une manière de résoudre ce problème.

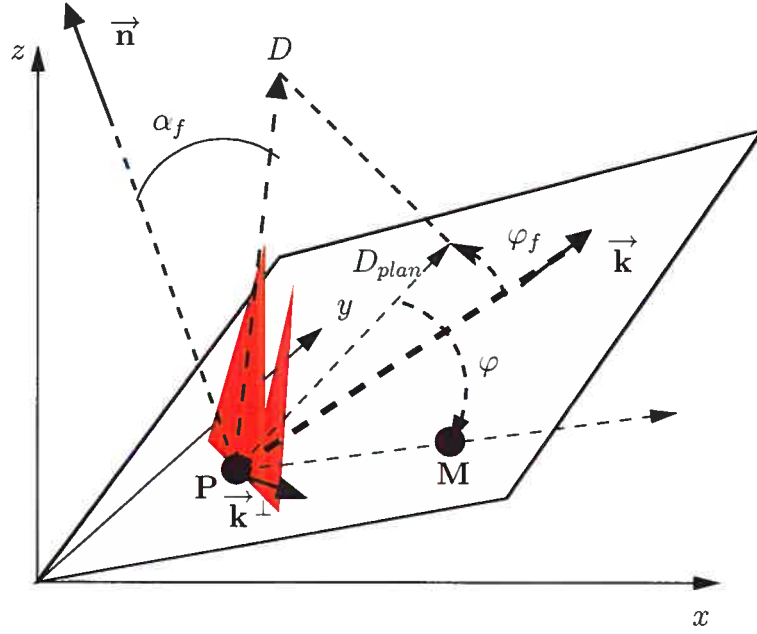


FIG. 5.4.1. Graphique tridimensionnel montrant les différents vecteurs directeurs.

plan tangent,  $\varphi$  est l'angle entre la direction  $\vec{k}$  et le vecteur  $\overrightarrow{PM}$ . Finalement,  $\varphi_f$  est l'angle la direction de la flamme et  $\vec{k}$ .

#### 5.4.2. Simplification du flux radiatif pour un front unidimensionnel

Simplifions maintenant l'expression du flux radiatif pour le cas d'un front unidimensionnel infini se déplaçant sur un plan incliné avec la présence d'un vent. Nous noterons par  $\theta_{el}$  l'angle d'élévation de ce plan. Tout comme pour la simplification effectuée dans la section 5.1.1, nous passerons aux coordonnées polaires. Les figures 5.4.2 et 5.4.3 expliquent la paramétrisation du plan respectivement dans le cas  $\theta_{el} > 0$  et  $\theta_{el} < 0$ . On reviendra plus loin sur la différence entre les deux cas. Afin d'alléger la notation, posons

$$\Lambda = \frac{(1 + \sin^2 \alpha_f)(1 - \sin \alpha_f \cos(\varphi - \varphi_f))}{\cos^2 \alpha_f}. \quad (5.4.7)$$

Avec les relations données pour trouver  $\Lambda$ , on s'aperçoit que  $\Lambda$  ne dépend pas de  $r = \|\overrightarrow{MP}\|$ . On peut donc intégrer facilement par rapport à cette variable comme on l'a fait plus tôt pour obtenir une forme simplifiée du flux 5.1.1. Cependant, on ne peut pas dire que le flux total est deux fois le flux de la partie supérieure, car si le vent n'est pas perpendiculaire au front, on perd la symétrie par rapport

## Chapitre 6

---

### CALIBRAGE ET SIMULATIONS

Maintenant que nous sommes en mesure de résoudre les équations et de trouver la vitesse du front, nous pouvons croire qu'il ne reste plus qu'à faire des simulations. Ce n'est malheureusement pas le cas. Le modèle de Margerit nécessite des données que nous ne possédons pas. Ainsi, avant de passer aux simulations, nous devons trouver les paramètres manquants.

#### 6.1. PARAMÈTRES DU MODÈLE DE MARGERIT

Afin de trouver la vitesse du front, nous avons besoin de spécifier les paramètres dimensionnels suivants :

$\sigma$ : le rapport surface/volume d'une particule végétale ( $m^{-1}$ ).

$P_{ini}$ : la charge initiale de combustible ( $kg/m^2$ ).

$\delta$ : la hauteur de la végétation ( $m$ ).

$\rho_p$ : la densité de la particule végétale ( $kg/m^3$ ).

$H_{ini}$ : l'humidité de la végétation (%).

$h_f$ : la hauteur de la flamme ( $m$ ).

$T_f$ : la température de la flamme ( $K$ ).

$P_{ext}$ : la charge d'extinction ( $kg/m^2$ ).

Avec ces paramètres, nous sommes en mesure d'obtenir la vitesse de propagation. Par contre, certains de ceux-ci ne sont pas accessibles, c'est-à-dire que ce ne sont pas des données que possède l'industrie ou qu'il n'existe pas de relations

connues, du moins par nous.  $\sigma$ ,  $P_{ini}$ ,  $\delta$ ,  $\rho_p$  et  $H_{ini}$  sont habituellement connus. Ces paramètres sont également les entrées pour le modèle de Rothermel. Il reste cependant à déterminer  $T_f$ ,  $P_{ext}$  et  $h_f$ . Pour la température de la flamme  $T_f$ , nous la fixons à  $1200K$ . Cette température correspond à la température de la partie orange des flammes et, également, à la température médiane. Ainsi, c'est une très bonne supposition, la même que Margerit pose. Par contre, ce n'est pas aussi simple pour les deux paramètres restant :  $P_{ext}$  et  $h_f$ .

## 6.2. CALIBRAGE

Il reste à déterminer la charge d'extinction et la hauteur de la flamme. Margerit reste très discret sur les moyens de les obtenir. En le consultant, il nous a informés que pour ses simulations, il avait fixé  $P_{ext}$  arbitrairement à 10% de la charge initiale maximale ( $P_{ext} = 0.1P_{ini}$ ). Mais avant de vérifier si l'hypothèse de Margerit semble réaliste, examinons le rôle de  $P_{ext}$ . La charge d'extinction, comme son nom l'indique, est la densité surfacique minimale de végétal nécessaire afin qu'il y ait combustion. Dès que la densité surfacique passe sous le seuil  $P_{ext}$ , la combustion s'arrête.  $P_{ext}$  est donc la densité surfacique correspondant aux résidus après la combustion par la flamme. Cette quantité est donc plus une caractéristique des particules végétales que de la répartition de ces dernières. Il faudrait que  $P_{ext}$  soit également une certaine fonction de  $\sigma$  et de  $\rho_p$ , paramètres qui caractérisent la nature de la particule végétale. Une forme simple pourrait être  $P_{ext} = \alpha\rho_p/\sigma$ , où  $\alpha$  est une constante sans dimension. Celle-ci a les bonnes unités. Il ne reste plus qu'à déterminer  $\alpha$  et à vérifier si cette forme pour  $P_{ext}$  est plausible.

Nous devons également trouver  $h_f$ , la hauteur de la flamme. La seule information que nous donne Margerit est que  $h_f$  est de l'ordre de la hauteur de la végétation. Nous nous retrouvons donc en face de deux données manquantes,  $\alpha$  et  $h_f$ . Sans elles, nous ne pouvons pas obtenir la vitesse du front.

### 6.2.1. Détermination de $h_f$

#### 6.2.1.1. Méthodologie

Décrivons la méthodologie que nous utilisons afin de trouver une forme pour  $h_f$ . Premièrement, nous fixons  $\alpha$ . Nous pourrions, par la suite, varier cinq paramètres qui sont les plus susceptibles d'influencer la hauteur des flammes. Pour chacune des combinaisons possibles de paramètres, nous cherchons  $h_f$  tel que la vitesse de propagation fournie par le modèle de Rothermel corresponde à celle de Margerit. (Nous avons choisi le modèle de Rothermel, puisque les modèles empiriques que nous connaissons se basent tous sur celui-ci. De plus, le calcul de la vitesse est quasi instantané.) Pour y arriver, nous créons la fonction  $f(h_f) = v_M(h_f) - v_R$ , où  $v_M(h_f)$  est la vitesse de propagation du modèle de Margerit pour un certain  $h_f$  et  $v_R$  est la vitesse de Rothermel. Le  $h_f$  cherché est le zéro de cette fonction  $f(h_f)$  que nous recherchons avec *fzero* de *Matlab*. Les paramètres que nous varions ainsi que leurs valeurs sont présentés dans la table 6.2.1. Ici,  $H$  ne correspond pas à l'humidité, mais à la chaleur contenue dans la végétation du modèle de Rothermel. Il est aussi à noter que les valeurs prises par les paramètres sont dans le domaine des valeurs de validation qu'a utilisées Wilson [6] pour vérifier les équations de Rothermel. Malheureusement, l'intervalle de valeurs n'est pas très grand ce qui réduit le domaine de validité.

Maintenant que nous possédons une base de données, c'est-à-dire  $h_f$  en fonction

	minimum	maximum	pas
$\sigma$	4150	7750	100
$\delta$	0.01	0.1750	0.005
$\rho_p$	460	480	5
$P_{ini}$	0.05	0.5	0.05
$H$	17000	19500	500

TAB. 6.2.1. Valeurs des différentes variables utilisées pour le calibrage

des cinq paramètres, nous voulons voir s'il existe une relation entre  $h_f$  et les variables et, si oui, quelle est l'allure de cette dépendance. Pour arriver à répondre



à ces questions, nous aurons besoin d'outils statistiques. La première étape a été effectuée par Miguel Chagnon, consultant en statistique au département. Il a entré les données dans le logiciel SAS afin que celui-ci nous retourne les dix modèles (formes de  $h_f$ ) les plus satisfaisant sur le plan statistique. Pour ce faire, nous avons posé deux hypothèses. La première est que  $h_f$  est linéaire en ses variables. En statistique, cela signifie qu'il n'y a pas de multiplication entre les différentes variables, c'est-à-dire que  $h_f$  s'écrit sous la forme

$$h_f = a_{0,0} + \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^m a_{i,j} x_i^j, \quad (6.2.1)$$

où  $x_i$  correspond aux différents paramètres ( $\sigma$ ,  $\delta$ ,  $\rho_p$ ,  $P_{ini}$  et  $H$ ). La deuxième est que le degré du polynôme ( $m$ ) est au maximum 3. Pour nous retourner les meilleurs modèles, SAS utilise une méthode de sélection de modèles pas à pas. Le tableau 6.2.2 montre les dix modèles sélectionnés par le logiciel pour  $\alpha = 0$ .

No du modèle	variables
1	$\delta$
2	$\delta, P_{ini}$
3	$\delta, P_{ini}, \delta^2$
4	$\delta, P_{ini}, \delta^2, \delta^3$
5	$\delta, P_{ini}, \delta^2, \delta^3, P_{ini}^2$
6	$\delta, P_{ini}, \delta^2, \delta^3, P_{ini}^2, H$
7	$\delta, P_{ini}, \delta^2, \delta^3, P_{ini}^2, H, P_{ini}^3$
8	$\delta, P_{ini}, \delta^2, \delta^3, P_{ini}^2, H, P_{ini}^3, \rho_p$
9	$\delta, P_{ini}, \delta^2, \delta^3, P_{ini}^2, H, P_{ini}^3, \rho_p, \sigma$
10	$\delta, P_{ini}, \delta^2, \delta^3, P_{ini}^2, H, P_{ini}^3, \rho_p, \sigma, \sigma^3$

TAB. 6.2.2. Les dix modèles sélectionnés par SAS avec la méthode pas à pas.

#### 6.2.1.2. Tests du coefficient de corrélation et du VIF

Il reste maintenant à choisir lequel de ces dix modèles concorde le mieux avec les données. Pour ce faire, nous effectuons deux tests : le coefficient de corrélation

$R^2$  et le VIF. Expliquons chacun de ces tests. Tout d'abord, le coefficient de corrélation correspond à une mesure de distance entre les données et la prédiction du modèle. Plus  $R^2$  est près de 1, mieux le modèle prédit les données. On peut trouver  $R^2$  grâce à l'équation suivante :

$$R^2 = \frac{\sum (\tilde{h}_f - \bar{h}_f)^2}{\sum (h_f - \bar{h}_f)^2}, \quad (6.2.2)$$

où  $\tilde{h}_f$  est la valeur prédite par le modèle et  $\bar{h}_f$  est la moyenne des  $h_f$ . Le deuxième outil est le test du VIF (Variance Inflation Factors). C'est une valeur qui est calculée pour chacun des  $a_{ij}$  des différents modèles. Il correspond à un détecteur de multicolinéarité. Voyons comment se calcule ce facteur. Lorsque nous utilisons SAS ou la fonction *regress* de *Matlab*, nous devons fournir en entrée une matrice  $X$  dont la première colonne est remplie de 1 et les autres correspondent aux différents vecteurs  $x_i^j$ . En réalité, cette matrice correspond à celle de l'équation

$$\vec{h}_f = X\vec{a}, \quad (6.2.3)$$

où  $\vec{a}$  est le vecteur des coefficients  $a_{i,j}$  que l'on veut déterminer. Si cette matrice est près d'être singulière, des problèmes peuvent survenir lors de la résolution numérique. De plus, cette singularité correspond à la présence de multicolinéarité entre les variables. Les valeurs du VIF sont les entrées de la diagonale de la matrice calculée par

$$(X^T X)^{-1}. \quad (6.2.4)$$

Plus une valeur du VIF est grande, plus il y a une variation dans la variance et donc, une plus grande incertitude dans les résultats obtenus. Les statisticiens acceptent des valeurs de VIF allant jusqu'aux environs de 10. Après, on doit conclure à la multicolinéarité et à la non-validité de la formule 6.2.1.

#### 6.2.1.3. Choix du modèle

Voici les résultats obtenus quand on fixe  $\alpha = 0$ . La table 6.2.3 montre le coefficient de corrélation de chacun des modèles ainsi que la valeur maximale du VIF. Avec les résultats de  $R^2$  de la table 6.2.3, nous pourrions croire que les modèles 6 à 10 sont ceux que nous recherchons. Par contre, en regardant leur

No du modèle	$R^2$	VIF maximal
1	0.746	1
2	0.840	1.351
3	0.894	14.595
4	0.907	464.251
5	0.914	468.545
6	0.922	468.875
7	0.922	1678.734
8	0.922	1678.734
9	0.922	1678.776
10	0.922	1678.778

TAB. 6.2.3. Les dix modèles sélectionnés par SAS avec leur  $R^2$  et leur VIF maximal.

VIF, on voit qu'ils ne représentent pas de bons modèles, car ils sont très loin de 10 ce qui caractérise la présence de problèmes de multicollinéarité. Ils sont donc à rejeter. On remarque que le modèle 4 possède un VIF de 464.251, ce qui correspond également à un cas de multicollinéarité. Il ne reste que les modèles de 1 à 3. Avec ce que nous connaissons, le choix du modèle s'arrête sur le troisième, car le  $R^2$  est le plus proche de 1. Ainsi, nous prenons

$$\tilde{h}_f = -0.2 + 1.737\delta - 6.765\delta^2 + 0.122P_{ini}. \quad (6.2.5)$$

On vérifie alors la validité de ce modèle pour d'autres valeurs de  $\alpha$ . On a calculé la corrélation entre les données fournies avec  $\alpha = 0.1, 0.2$  et la prédiction de  $h_f$  donnée par l'équation C.1.1. Les résultats sont très concluants. On obtient une corrélation de 1.05 pour  $\alpha = 0.1$  et 0.90 pour  $\alpha = 0.2$ . Il est à noter que nous obtenons une corrélation supérieure à 1. Ceci est possible puisqu'on utilise l'équation C.1.1 pour la prédiction de  $\tilde{h}_f$  qui provient de la régression du cas  $\alpha = 0$  et non pas un  $\tilde{h}_f$  résultant d'une régression provenant des données fournies par ces deux  $\alpha$ . Dans l'annexe C, on peut voir les graphiques montrant les erreurs relatives commises sur  $h_f$  selon les différentes variables et pour les différents  $\alpha$ .

On peut donc affirmer que la formule C.1.1 pour  $h_f$  décrit bien ce qui se passe, du moins d'un point de vue statistique.

Par contre, en analysant l'équation C.1.1, on s'aperçoit qu'elle n'est pas une solution physiquement acceptable. Elle correspond bien pour des données qui sont dans le domaine de la table 6.2.1, mais elle ne l'est pas du tout lorsque l'on sort de ce dernier. Le problème est causé par le coefficient négatif devant le terme de  $\delta^2$ . Il est donc possible que l'on obtienne des hauteurs de flamme négatives avec ce modèle. Ainsi, si nous souhaitons extrapoler à l'extérieur des bornes utilisées pour déterminer  $h_f$ , l'équation C.1.1 ne nous est pas utile.

À ce point-ci, trois options s'offrent à nous. La première est d'utiliser le deuxième modèle, i.e.

$$\tilde{h}_f = 0.003 + 0.774\delta + 0.126P_{ini}. \quad (6.2.6)$$

La deuxième est de vérifier une hypothèse proposée par M. Chagnon. Celle-ci est que  $\tilde{h}_f$  pourrait dépendre de  $\delta^4$ . Nous avons examiné cette possibilité, mais il en résulte que le VIF reste trop élevé et nous rejetons ce modèle. Finalement, la troisième option est de revoir la forme générale de l'équation pour  $h_f$ .

#### 6.2.1.4. Problème de l'équation 6.2.6

La première option semble a priori bien satisfaire nos attentes. Par contre, l'équation 6.2.6 ne décrit pas bien ce qui se produit lorsque la charge de combustible  $P_{ini}$  tend vers zéro. Dans ce cas, la vitesse explose vers l'infini comme le montre la figure 6.2.1. Elle devrait plutôt converger vers 0. Pour comprendre ce qui se produit ici, il faut s'arrêter à la forme dimensionnelle de l'équation 5.2.2 et à la méthode de point fixe. L'équation dimensionnelle est

$$v = \frac{-2\delta h_f K T_f^4 B \int_{u_2}^{\infty} \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \int_{\alpha}^{\pi} \left[ \exp\left(K \frac{d_f + l_f}{\cos \theta}\right) - \exp\left(K \frac{d_f}{\cos \theta}\right) \right] d\theta du}{\pi P_{ini} (C_s (T_{inf} - T_{ev}) + L_{ev} H_{ini} + (C_s + C_w H_{ini})(T_{ev} - T_a))}. \quad (6.2.7)$$

Rappelons que  $K = \frac{\sigma\beta}{4}$ , avec  $\beta = \frac{P_{ini}}{\delta\rho_p}$ . Ainsi,  $K$  est proportionnel à  $P_{ini}$ . Afin que la vitesse tende vers zéro lorsque  $P_{ini}$  tend vers zéro, nous devons avoir que

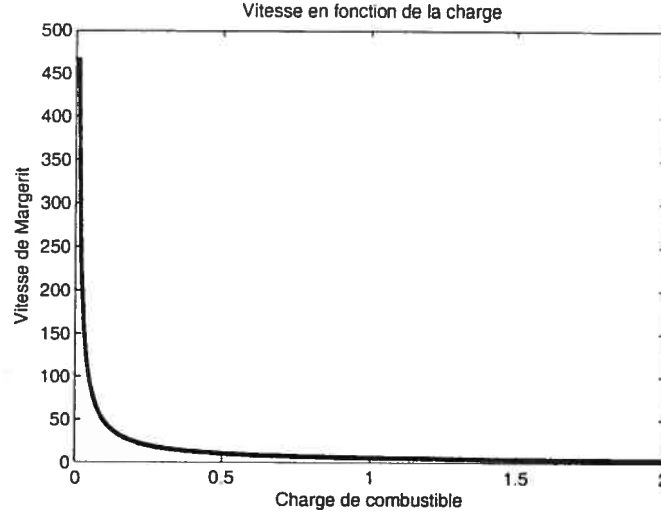


FIG. 6.2.1. Vitesse en fonction de la charge pour  $h_f$  donné par 6.2.6.

le numérateur converge plus rapidement vers zéro que le dénominateur. Ce dernier y converge de manière linéaire avec  $P_{ini}$ . Pour ce qui est du numérateur, nous avons que  $h_f$  tend vers  $0.003 + 0.774\delta$  et sur la base de résultats d'expériences numériques, nous observons que l'intégrale double  $I$  ne converge pas plus rapidement vers 0 que le dénominateur. Ce serait intéressant de démontrer ceci théoriquement dans des travaux ultérieurs. En changeant la forme du modèle de  $h_f$ , nous pourrions éviter ce problème.

#### 6.2.1.5. Nouvelle forme pour $h_f$

Une forme simple qui répond à nos attentes est la suivante :

$$h_f = \left( a_{0,0} + \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^m a_{i,j} x_i^j \right) P_{ini}, \quad (6.2.8)$$

où les  $x_i^j$  sont définis comme précédemment et où l'on cherche les  $a_{i,j}$ . De cette manière, le numérateur de 6.2.7 tendra plus rapidement vers zéro que le dénominateur, et la vitesse de la flamme convergera vers zéro. Afin de trouver le bon modèle, nous pouvons refaire les tests du  $R^2$  et du VIF, mais au lieu de chercher  $h_f$  en fonction des autres paramètres, nous chercherons  $h_f/P_{ini}$ . Encore une fois, nous trouvons que les meilleurs modèles ne dépendent que de  $P_{ini}$  et de  $\delta$ . Celui

que l'on retient est

$$\tilde{h}_f = (0.192 + 1.257\delta) P_{ini}. \quad (6.2.9)$$

Par contre, ce modèle n'est valide que pour de petites valeurs de  $P_{ini}$  comme celles présentées dans la table 6.2.1. Plus loin, nous utilisons une base de données couvrant des valeurs de  $P_{ini}$  allant de  $1kg/m^2$  jusqu'à  $50kg/m^2$  et  $\delta = 2m$ . En calculant  $h_f$  pour ces valeurs, nous obtenons une hauteur de flamme de l'ordre de  $100m$  qui n'est pas réaliste.

Afin d'obtenir un modèle plus plausible pour  $h_f$ , nous recréons une base de données de  $h_f$  en fonction de nouveaux paramètres avec la même procédure utilisée plus tôt. Cette fois, les paramètres sont  $P_{ini}$  et  $\delta$ , car les études précédentes montrent que ce sont les deux seuls paramètres influençant  $h_f$ . Nous fixons donc  $\sigma$ ,  $\rho_p$ ,  $H$  et  $\alpha = 0$  et cherchons  $h_f$  qui satisfait  $f(h_f) = v_M(h_f) - v_R$  en fonction de  $P_{ini}$  et  $\delta$ . Le résultat obtenu est que

$$\tilde{h}_f = (0.066 + 0.0402\delta - 0.002P_{ini}) P_{ini}. \quad (6.2.10)$$

Le coefficient de corrélation est de 0.84 et les valeurs du VIF sont 1. Ainsi, cette équation explique assez bien  $h_f$  lorsque  $\alpha = 0 = P_{ext}$ . Nous revenons sur  $\alpha$  dans la prochaine partie. La figure 6.2.2 montre la vitesse en fonction de  $P_{ini}$ . On y voit également la prédiction de la vitesse par le modèle de Rothermel. La tendance de la vitesse lorsque la charge diminue est bien celle que l'on désire. Également, le comportement quand la charge augmente est le même que le modèle de Rothermel. La seule différence est au niveau de l'ordre de grandeur de la vitesse. Celle de Margerit est plus petite que la vitesse fournie par Rothermel. Il faut cependant faire attention avec cette nouvelle forme pour  $h_f$ , car lorsque la charge  $P_{ini}$  devient très grande, il pourrait arriver que  $h_f$  devienne négatif.

### 6.2.2. Choix pour $P_{ext}$

La stratégie utilisée pour obtenir  $h_f$  ne nous permet pas de trouver  $P_{ext}$ . Par contre, comme le montre l'allure des graphiques de l'annexe C,  $h_f$  n'est fonction que de  $P_{ini}$  et de  $\delta$ , car il n'y a pas d'erreur significative commise en variant les

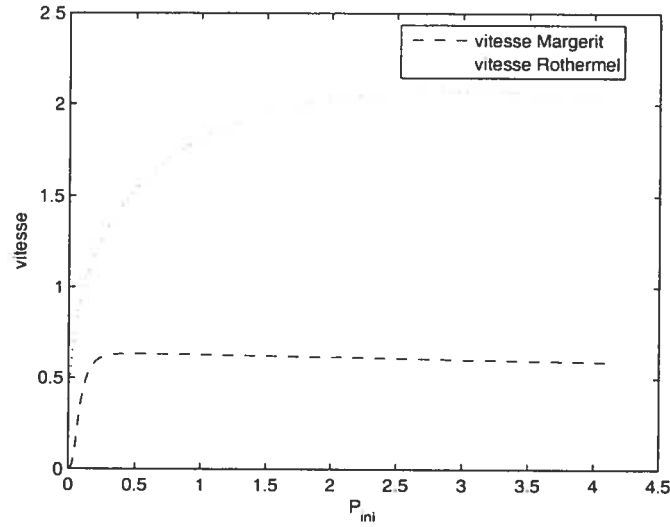


FIG. 6.2.2. Vitesse en fonction de la charge pour  $h_f$  donné par 6.2.9. On y voit aussi la vitesse de Rothermel.

autres paramètres. En particulier,  $P_{ext}$ , via  $\alpha$ , ne semble pas d'avoir d'impact majeur sur  $h_f$  et par le fait même sur la vitesse (du moins pour ces valeurs de  $\alpha$ ) puisque la vitesse de Rothermel n'est pas fonction de  $P_{ext}$ . En d'autres termes, pour un jeu de données fixe, nous obtenons sensiblement les mêmes valeurs de  $h_f$  pour les différentes valeurs de  $\alpha$ . Cependant, nous n'avons pas réussi à vérifier l'impact réel de  $\alpha$ , ni à l'obtenir. Pour la suite, nous émettons l'hypothèse que la combustion est totale, c'est-à-dire que  $P_{ext} = 0$  ( $\alpha = 0$ ). Ceci aura pour effet de fournir la vitesse maximale de front pour un jeu de données précis. Il est à noter que cette affirmation est particulièrement appropriée lorsque l'on étudie des feux de broussailles ou de copeaux de bois, qui habituellement disparaissent complètement lors de la combustion. Ce sont justement ces types de feux qui ont été utilisés pour élaborer le modèle de Rothermel.

### 6.3. VALIDITÉ DU MODÈLE POUR LES FACTEURS PENTE ET VENT

À première vue, nous pourrions croire que nous avons réglé tous les problèmes et que nous pouvons simuler un feu quelconque tant que nous respectons les hypothèses formulées jusqu'ici. Par contre, cela n'est pas le cas. Nous verrons ici

que la modélisation des facteurs pente et vent est problématique et pour être en mesure d'utiliser le modèle, il faudra émettre d'autres hypothèses.

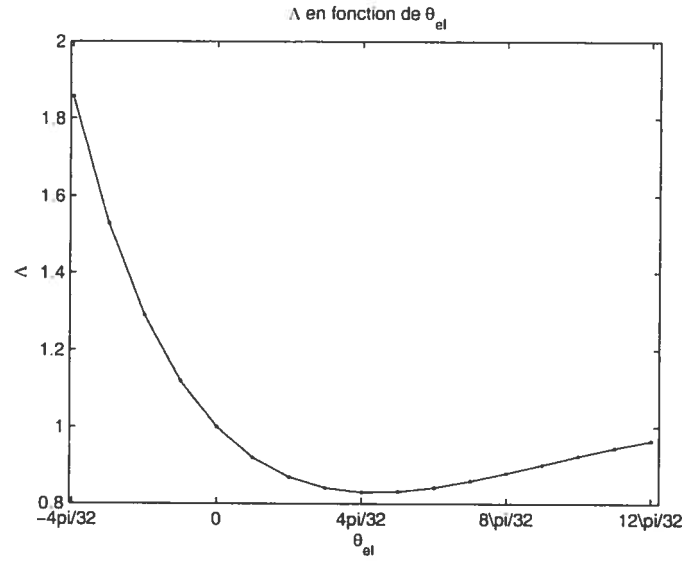
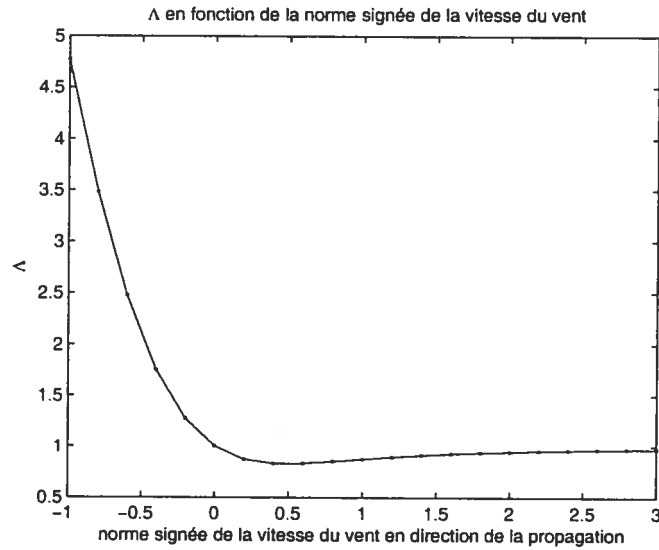
### 6.3.1. Analyse de $\Lambda$

Une phrase apparaissant à la page 131 de [10] sous l'équation 4.205 indique que Margerit ne connaît pas le domaine d'application pour la forme de flux radiatif qu'il utilise. Analysons le terme représentant la pente et le vent, c'est-à-dire  $\Lambda$  et essayons de voir si nous pouvons en tirer quelque chose. Tout d'abord, rappelons que

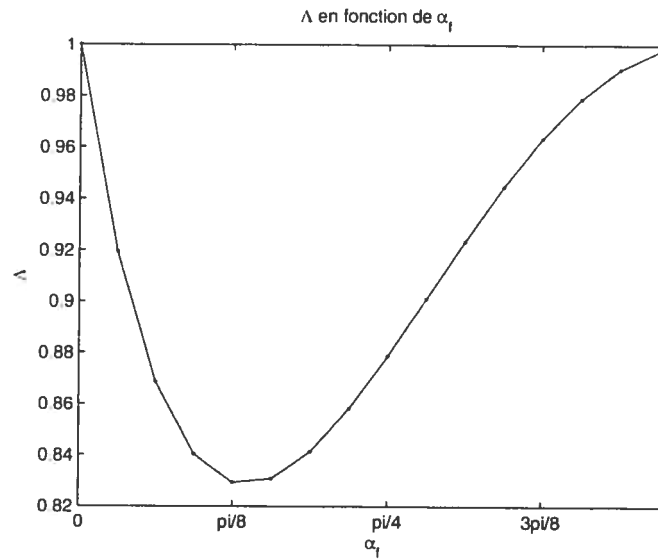
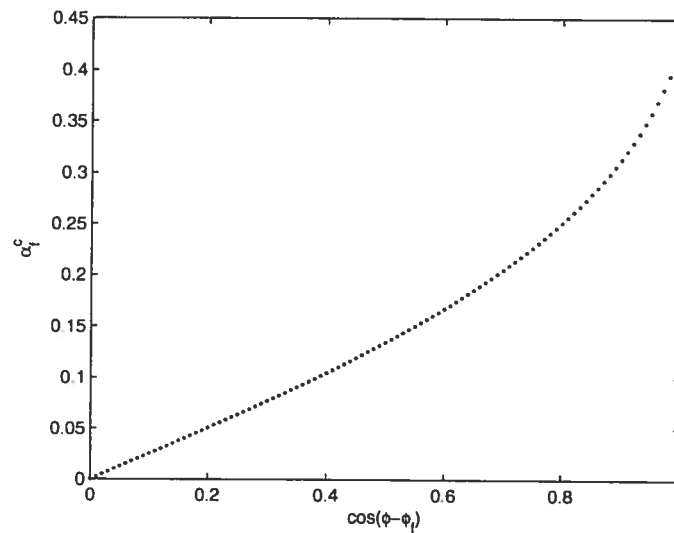
$$\Lambda = \frac{(1 + \sin^2 \alpha_f)(1 - \sin \alpha_f \cos(\phi - \phi_f))}{\cos^2 \alpha_f}, \quad (6.3.1)$$

où les différents paramètres sont définis dans la section 5.4.2. En examinant l'intégrale 5.4.8, on s'aperçoit que  $\Lambda$  doit être positif afin que ces intégrales convergent à la limite. Un autre point qui nous permet de caractériser  $\Lambda$  est la signification physique de l'équation 5.4.8. Celle-ci quantifie le flux radiatif produit par le front reçu en un certain point. On sait également que la vitesse du front est directement proportionnelle à ce flux qui est une fonction décroissante de  $\Lambda$ . Ainsi, afin de concorder avec la réalité, lorsque  $\theta_{el}$  augmente (sans vent), le flux doit augmenter et  $\Lambda$  doit décroître. C'est le même raisonnement qui s'applique lorsque la force du vent augmente. Regardons si  $\Lambda$  correspond à ces affirmations. Pour ce faire, fixons  $\theta$  (qui correspond à la direction de propagation dans le plan) à 0 si  $\theta_{el} < 0$  et à  $\pi$  sinon. Les figures 6.3.1 et 6.3.2 montrent respectivement la dépendance de  $\Lambda$  en  $\theta_{el}$  et en la norme de la vitesse du vent. Ici, une norme négative signifie que le vent souffle dans la direction opposée à la propagation du front. On remarque que dans les deux cas,  $\Lambda$  atteint un minimum avant de s'accroître par la suite ce qui cause une diminution de la vitesse lorsque  $\theta_{el}$  ou la norme du vent augmente. Ce phénomène ne correspond pas à la réalité. Il faut donc trouver un domaine de validité pour le vent et la pente. Ces deux paramètres entrent dans le calcul de  $\alpha_f$ , l'angle entre la direction normale au plan et la direction de la flamme. Cet angle est positif et l'allure de  $\Lambda$  selon ce paramètre est montrée à la figure 6.3.3. On remarque qu'il y a un angle critique à partir duquel  $\Lambda$  commence à croître, c'est-à-dire que si le vent est trop grand ou que si la pente est également trop



FIG. 6.3.1.  $\Lambda$  en fonction de  $\theta_{el}$ .FIG. 6.3.2.  $\Lambda$  en fonction de la norme signée de la vitesse du vent.

grande, il y aura une diminution de la vitesse ce qui contredit les observations. Voilà donc le domaine d'application, i.e. il faut que la combinaison de la pente et du vent n'entraîne pas un angle  $\alpha_f$  supérieur à un certain angle critique  $\alpha_f^c$  qui est environ  $\pi/8$  selon les valeurs de  $\cos(\phi - \phi_f)$  (voir figure 6.3.4). Pour la suite de ce mémoire, nous nous assurerons que le domaine de validité est respecté.

FIG. 6.3.3.  $\Lambda$  en fonction de  $\alpha_f$ .FIG. 6.3.4.  $\alpha_f^c$  en fonction de  $\cos(\phi - \phi_f)$ .

Physiquement, cette contrainte signifie que le modèle est valide pour de très petits vents et de faibles inclinaisons du sol. Ces hypothèses avaient été imposées plus tôt lors de la réduction dimensionnelle du modèle, mais sans quantification. Voilà donc la façon de les quantifier.

## 6.4. SIMULATIONS

Le choix d'étudier le cas unidimensionnel du modèle de Margerit est basé sur deux raisons. La première est d'arriver à extraire une vitesse de propagation du front, vitesse qui n'est pas donnée explicitement par le modèle bidimensionnel. Cette vitesse de propagation est nécessaire afin de vérifier l'influence des différents facteurs et pour comparer avec d'autres modèles. La deuxième raison, qui découle un peu de la première, est la difficulté de résoudre le problème bidimensionnel. L'approximation du flux radiatif pour des feux de formes quelconques est très coûteuse en temps de calcul et également difficile à obtenir de manière assez précise. C'est principalement pour ces raisons que nous venons d'étudier le cas unidimensionnel. Avant de passer à des exemples de simulations de feux, attardons-nous sur le moyen de mettre en oeuvre le modèle de Margerit dans le cas bidimensionnel.

### 6.4.1. Mise en oeuvre du modèle avec la méthode *Level-Set*

La mise en oeuvre du modèle avec la méthode *Level-Set* suppose que lors du zoom en un point du front, on voit le front comme un front plat infiniment long se propageant sur un plan avec une végétation uniforme (voir figure 5.1.1). Cela revient à dire que nous considérons les résultats de Margerit à une échelle plus petite que son échelle gigascopique. Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation *Level-Set* couplée avec l'équation de la vitesse unidimensionnelle de Margerit, c'est-à-dire

$$\phi_t(x, y, t) + v(x, y, t) |\nabla \phi(x, y, t)| = 0, \quad (6.4.1a)$$

$$v - \frac{\delta h_f K T_f^4 B \int_0^\infty \mathcal{M}_r(u, v/v_r) du}{\pi P_{ini}(C_s(T_{inf} - T_{ev}) + L_{ev}H_{ini} + (C_s + C_w H_{ini})(T_{ev} - T_a))} = 0. \quad (6.4.1b)$$

Rappelons que ce champ de vitesse en un point  $(x, y)$  pointe dans la direction du gradient de la fonction  $\phi$ . Cette dernière varie avec le temps et donc le champ aussi. Il faut ainsi recalculer le champ de vitesse à chaque itération, ce qui s'avère lourd en temps de calcul avec la méthode de la section 5.2.4.

Le problème survient lors de l'évaluation de l'intégrale double de l'équation 5.2.2. La quadrature utilisée pour évaluer l'intégrale est lente et ne peut qu'en

calculer une seule à la fois. Cela signifie que pour une grille de  $100 \times 100$ , il y a, à chaque itération en temps, 10000 évaluations de l'intégrale et chacune demande environ 3 secondes. Les simulations sont exécutées avec la version 7.3 de *Matlab* sur des stations de travail AMD 64 core 2 cadencés à 4.6+GHz et ayant 2048 MB DDR400. Il est donc impensable de simuler la propagation d'un feu de cette manière.

La solution proposée ici est de créer une base de données qui nous permet d'évaluer l'intégrale double en fonction des différents paramètres. Ces derniers sont au nombre de 6 :  $K$ ,  $l_f$ ,  $\sin \alpha_f$ ,  $\text{signe}(\theta_{ele})$  et deux variables ( $A$  et  $B$ ) entrant dans le calcul de  $\cos(\varphi - \varphi_f)$ . On sait que

$$\cos(\varphi - \varphi_f) = \frac{\vec{V}_{fl}^t}{\|\vec{V}_{fl}^t\|} \cdot \left( -\cos \theta \vec{k} - \sin \theta \vec{k}^\perp \right) \quad (6.4.2)$$

$$= A \cos \theta + B \sin \theta. \quad (6.4.3)$$

La base contient donc la valeur de l'intégrale double en fonction de tous les combinaisons possibles des 6 paramètres. Grâce à la fonction *interp* de *Matlab*, nous évaluons l'intégrale pour des valeurs quelconques des paramètres par interpolation. Un aspect important de cette méthode est que nous pouvons calculer l'intégrale en tous les points en même temps, ce qui demande environ 10 secondes pour la grille de  $100 \times 100$  pour chaque itération en temps.

#### 6.4.2. Simulation sans pente, ni vent

La première simulation que nous présentons est pour illustrer la mise en oeuvre de la méthode. On simule la propagation d'un feu sur un terrain plat avec tous les paramètres constants sauf la charge initiale qui est générée de manière aléatoire entre  $0 \text{ kg/m}^2$  et  $3 \text{ kg/m}^2$ . Il y a également un rectangle où la charge est uniforme à  $7 \text{ kg/m}^2$ . Les autres données utilisées sont présentées dans la table 6.4.1. La figure 6.4.1 montre le feu à différents moments. Nous avons placé en fond le coefficient d'extinction  $K$ . Plus ce dernier est grand, moins la vitesse du front est rapide. Ainsi, le rectangle avec une charge constante est une zone où le feu se propage moins rapidement.

$\sigma = 8130m^{-1}$	$\delta = 0.62m$	$C_w = 4180J/kg \cdot K$
$C_s = 2400J/kg \cdot K$	$\rho_p = 466kg/m^3$	$H_{ini} = 0.04$
$T_a = 300K$	$T_{ev} = 373K$	$T_{inf} = 600K$
$L_{ev} = 2.25 \times 10^6 J/kg$	$T_f = 1200K$	$B = 5.67 \times 10^{-8} W/m^2 \cdot K^4$

TAB. 6.4.1. Jeux de données pour les simulations avec le modèle de Margerit.

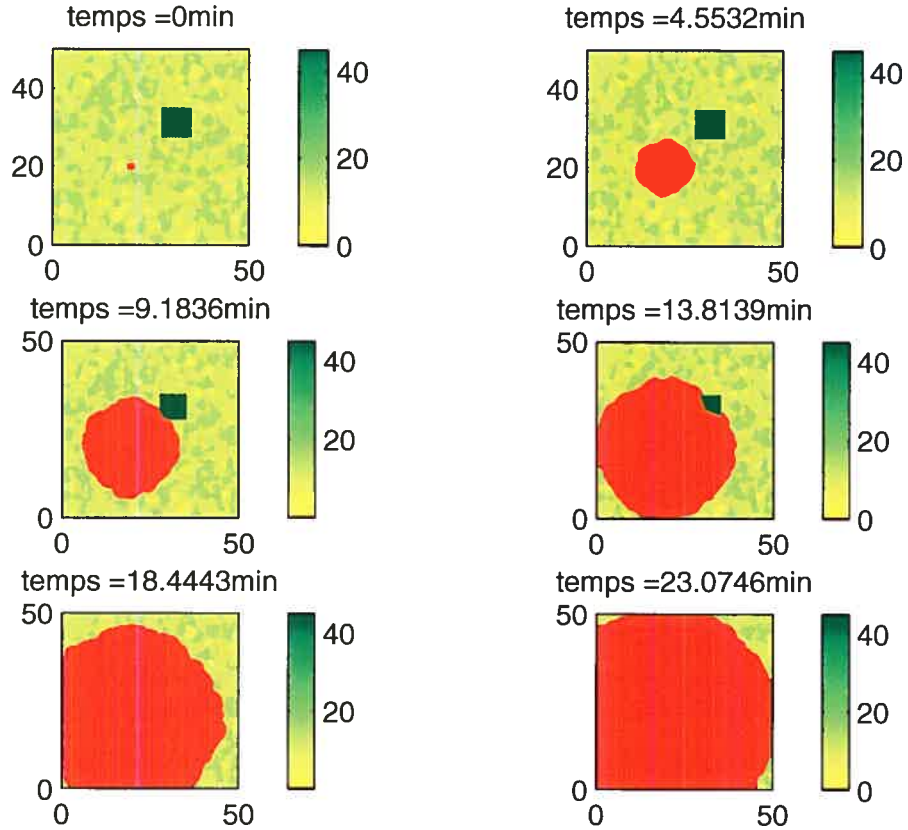


FIG. 6.4.1. Simulation avec une charge initiale choisie au hasard, sans vent sur un terrain plat. Les axes sont en mètre.

### 6.4.3. L'effet de la pente

Regardons ici l'effet de la pente du modèle de Margerit sur un front initialement circulaire. Nous comparons les résultats avec ceux obtenus avec le modèle de Rothermel et avec ceux sur un terrain plat. Le feu se propagera sur un plan incliné d'angle d'élévation de  $\pi/16$ . La végétation est uniforme et il n'y a pas de vent. Les paramètres décrivant la végétation sont dans la table 6.4.2. Le trait en

gras montre la position finale du front avec le modèle de Rothermel. Comme nous

$\sigma = 8130m^{-1}$	$\delta = 1m$	$C_w = 4180J/kg \cdot K$
$C_s = 2400J/kg \cdot K$	$\rho_p = 466kg/m^3$	$H_{ini} = 0.007$
$T_a = 300K$	$T_{ev} = 373K$	$T_{inf} = 600K$
$L_{ev} = 2.25 \times 10^6 J/kg$	$T_f = 1200K$	$B = 5.67 \times 10^{-8} W/m^2 \cdot K^4$
$P_{ini} = 4kg/m^2$		

TAB. 6.4.2. Jeux de données pour les simulations avec le modèle de Margerit avec une végétation uniforme.

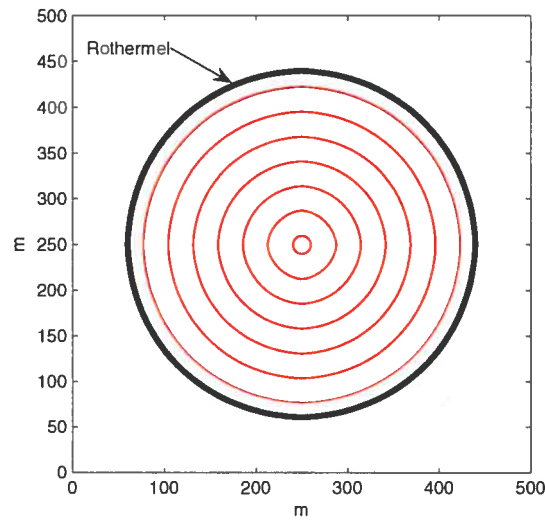


FIG. 6.4.2. Évolution du front sur un terrain plat avec le modèle de Margerit, toutes les 15 minutes.

pouvons le constater sur les figures 6.4.2 et 6.4.3, l'allure générale de la solution avec le modèle de Margerit est la même que celle de la solution avec le modèle de Rothermel. Pour les deux modèles la forme allongée du front dans la direction de la pente correspond à celle mentionnée dans la littérature. La seule différence est au niveau de la vitesse de propagation. Ici, la vitesse maximale est de  $2.38m/min$  et la vitesse minimale est de  $1.27m/min$ . Le modèle de Rothermel avec la correction de McArthur (équation 3.2.4) donne une vitesse plus grande, soit  $3.2m/min$ . C'est ce qui explique la différence en avant du front après 10 minutes. Il faut

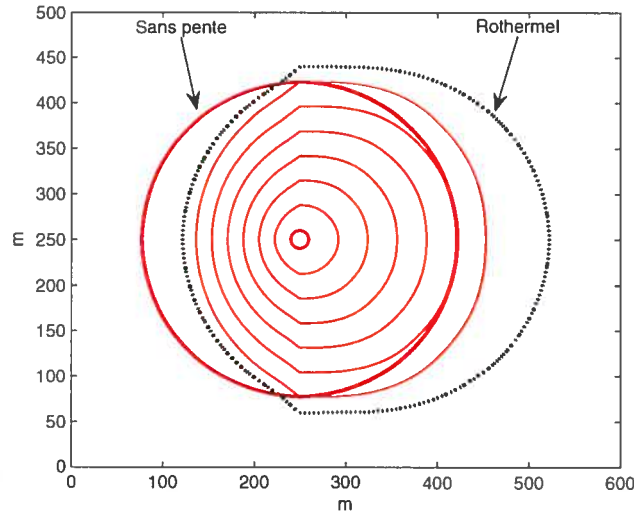


FIG. 6.4.3. Évolution du front un plan incliné ( $\theta_{el} = \pi/16$ ) avec le modèle de Margerit, toutes les 15 minutes.

également souligner que les valeurs de la table 6.4.2 sortent légèrement du domaine de validité du modèle de Rothermel. Portons également notre attention à la position du front au niveau des flancs. On remarque qu'il n'y a aucun effet de la pente et que le feu se propage comme s'il était sur un terrain plat. Ce résultat colle bien avec ce qui est observé dans la réalité et s'explique en analysant le flux radiatif à ce niveau. Puisqu'aux flancs, l'angle d'élévation est nul, nous obtenons que la normale au plan,  $\vec{n}$ , est dans la même direction que la flamme. Ainsi, nous obtenons que  $\alpha_f = 0$  (angle entre  $\vec{n}$  et la direction de la flamme), ce qui donne  $\Lambda = 1$ . Ce  $\Lambda$  correspond au cas où il n'y a pas de pente d'où le résultat que l'on voit. Il est à noter que c'est également le comportement que nous fournit le modèle de Rothermel avec la correction de McArthur.

#### 6.4.4. Effet du vent

Regardons maintenant une simulation sur un terrain plat avec une végétation uniforme (table 6.4.2) où il y a un vent soufflant à  $1.5\text{m/s}$  de gauche à droite. Nous devrions alors observer une propagation ayant une forme allongée en direction du vent et aplatie au niveau des flancs par rapport à une propagation sans vent. Cette dernière caractéristique peut être facilement obtenue en étudiant le flux

comme nous l'avons fait pour l'effet de la pente. Ici,  $\alpha_f > 0$  puisque la direction de la flamme n'est plus dans la direction normale au plan. Ainsi,  $\Lambda > 1$ , ce qui entraîne un flux radiatif moins grand d'après l'équation 5.4.8. La figure 6.4.4 montre le résultat. Nous avons placé en gras la position du front s'il n'avait pas de vent. Le phénomène que nous avons discuté au sujet des flancs est bien visible

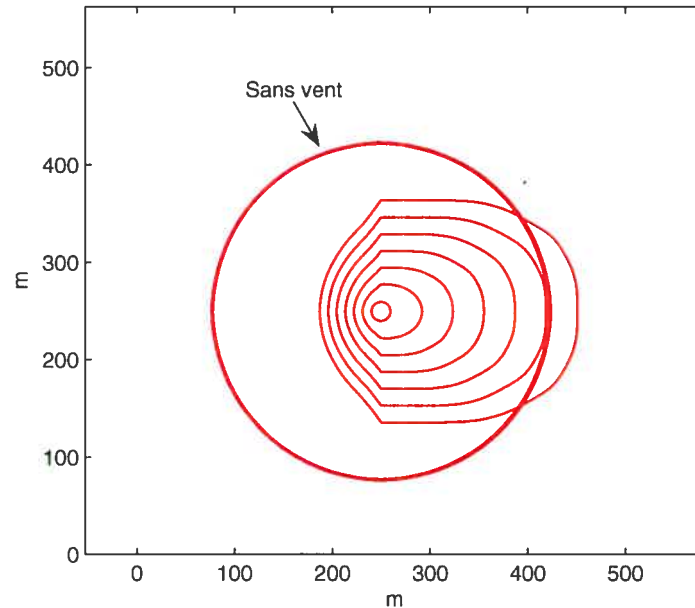


FIG. 6.4.4. Simulation avec une végétation uniforme avec un vent soufflant de gauche à droite.

ici. Cette différence des effets de la pente et du vent s'explique également d'un point de vue physique. La pente ne produit qu'un meilleur rayonnement, mais le vent cause, en plus du rayonnement, de l'advection de la chaleur. Ainsi, il y a moins de chaleur sur les flancs, car celle-ci est utilisée en avant du front. Cet effet du vent est discuté dans [1].

#### 6.4.5. Simulation avec une base de données

Nous utilisons ici une base de données fournie par Lael Parrott, Département de Géographie, Université de Montréal. Les différents paramètres qui définissent les particules végétales sont :  $\sigma = \frac{2}{0.00015} m^{-1} \approx 13333 m^{-1}$ ,  $\delta = 2m$ ,  $\rho_p = 1000 kg/m^3$  et  $H_{ini} = 0.01$ . La masse de combustible est donnée pour chaque



cellule de  $10m \times 10m$ . Nous connaissons également la topographie du terrain. La distribution de la charge en  $kg/m^2$  et la topographie sont respectivement illustrées sur les figures 6.4.5 et 6.4.6. Nous avons ajouté un lac au centre, c'est-à-dire là où la hauteur du terrain était la moins élevée.

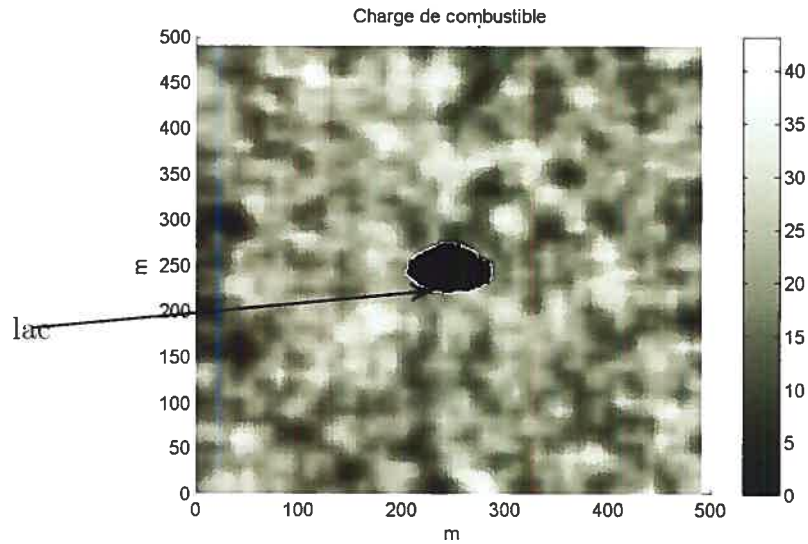
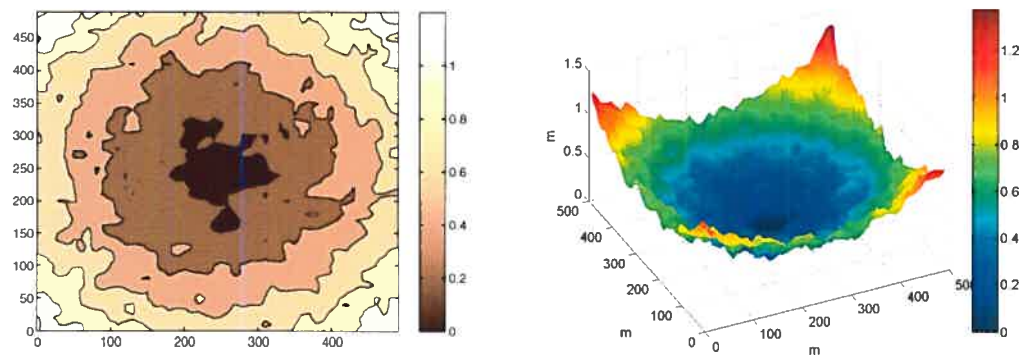


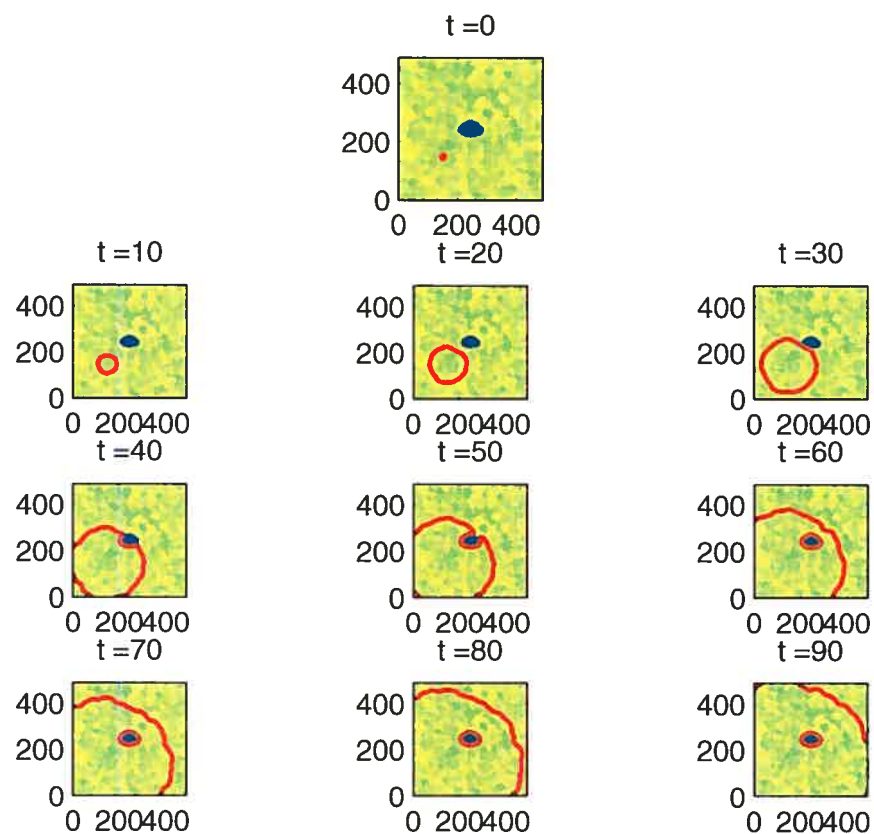
FIG. 6.4.5. Distribution de  $P_{ini}$ .



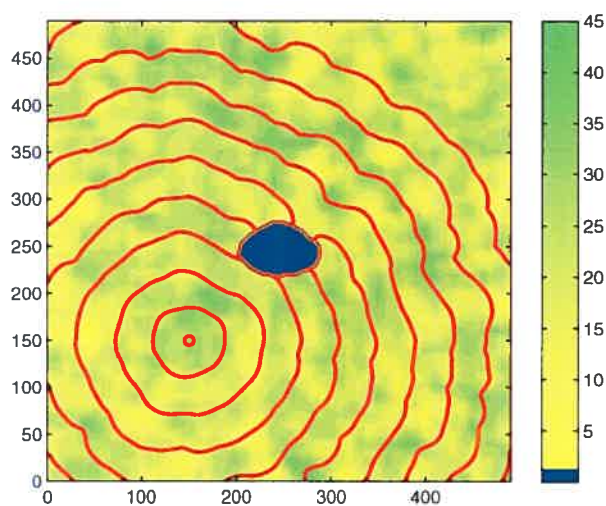
(a) Courbes de niveaux de la topographie. (b) Visualisation tridimensionnelle de la topographie.

FIG. 6.4.6. Topographie.

Deux simulations sont présentées ici : la première est avec le modèle de Rothermel et la seconde avec le modèle de Margerit. La figure 6.4.7 montre la projection du front sur le plan  $xy$  toutes les 10 minutes avec le modèle de Rothermel. Dans le cas du modèle de Margerit, les résultats sont présentés à la figure 6.4.8.

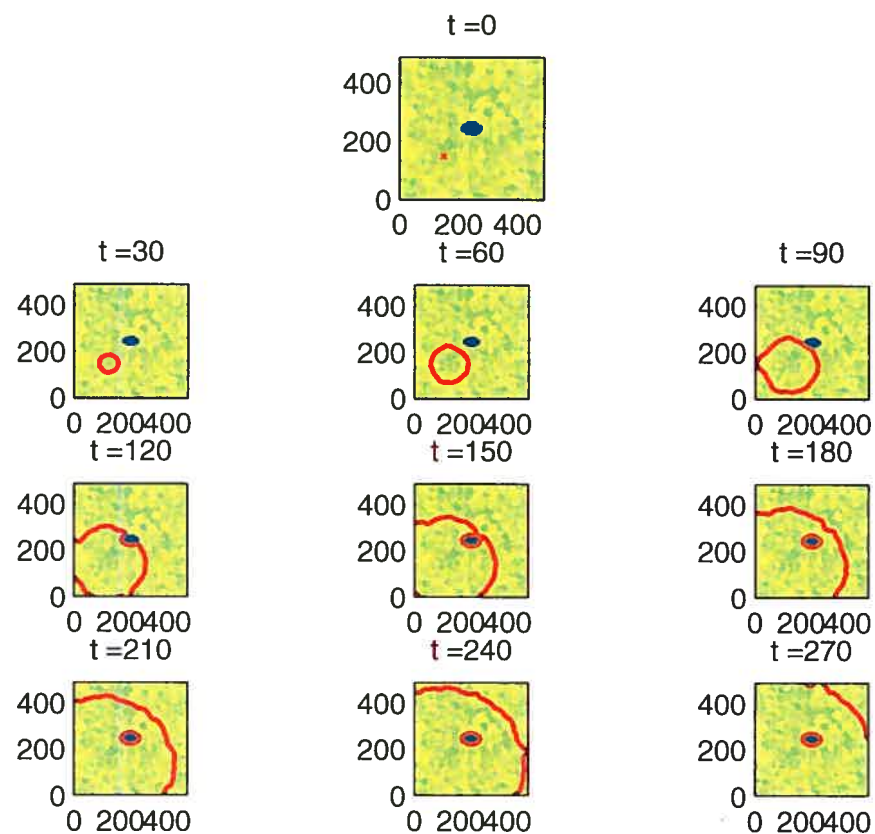


(a) Propagation du front.

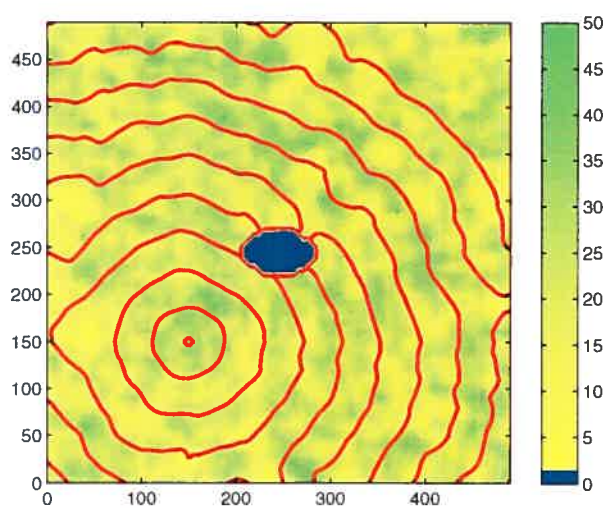


(b) Front à toutes les 10 minutes.

FIG. 6.4.7. Simulation avec le modèle de Rothermel.



(a) Propagation du front.



(b) Front à toutes les 30 minutes.

FIG. 6.4.8. Simulation avec le modèle de Margerit.

Les deux simulations donnent des résultats qualitatifs similaires si l'on ajuste l'échelle de temps. Cet ajustement est nécessaire parce que le front se propage moins rapidement avec le modèle de Margerit qu'avec celui de Rothermel. Il est à noter que le temps final de simulation est de 1h30 pour Rothermel et de 4h30 pour Margerit. La vitesse moyenne du modèle de Margerit est environ  $1.2m/min$  contrairement à environ  $4.85m/min$  pour le modèle de Rothermel. Cette différence s'explique par le fait que les données de cette simulation sont en dehors du domaine de calibrage que nous avons effectué, mais aussi par la nature des modèles. Rappelons que le modèle de Rothermel est basé sur des expérimentations en laboratoire et que celui de Margerit est purement théorique. Malgré le fait que les résultats sont différents d'un point de vue quantitatif, ils restent acceptables qualitativement puisque le comportement général est le même.

## CONCLUSION

---

Le projet initial consistait à effectuer des simulations de feux de forêt en solutionnant les divers problèmes rencontrés par les outils existants. En regardant les différents types de modèles utilisés par l'industrie, nous avons pu déterminer les forces et les faiblesses de chacun. Les modèles probabilistiques ne permettent pas de quantifier la vitesse de propagation. Pour ce qui est des modèles semi-empiriques, le domaine d'application est restreint et ne correspond pas nécessairement aux conditions rencontrées au Canada. Rappelons que le modèle canadien est basé sur celui de Rothermel qui a été conçu pour les feux de broussailles aux États-Unis. Ce type de végétation est loin d'être celui des forêts denses du Canada. Un autre aspect négatif de ce type de modèles est la difficulté d'incorporer l'effet du vent. Les modèles étant élaborés en laboratoire, ils ne considèrent pas l'effet des grands vents ainsi que le couplage avec les différentes conditions météorologiques.

Le gros du travail a été d'analyser un modèle de type théorique qui, au départ, semblait être en mesure de bien répondre aux problèmes des modèles semi-empiriques. Nous avons choisi le modèle multiéchelle de Jonathan Margerit [10]. En résumé, ce modèle prenait en considération les phénomènes liés à la combustion à quatre échelles différentes : microscopique, mésoscopique, macroscopique et gigascopique. Les principaux outils utilisés étaient les équations de bilan de masse, d'énergie et de quantité de mouvement pour les différents constituants présents. Par la suite, afin d'arriver aux équations du niveau macroscopique, on utilisait l'homogénéisation des variables de la state végétale. On couplait le tout avec les équations des strates du sol et de l'air ambiant. Le système a ensuite été

fermé avec l'aide de la thermodynamique des processus irréversibles. Pour finir, on réduisait la dimension des équations afin d'obtenir un modèle bidimensionnel.

Nous avons vu qu'il était difficile de résoudre le système d'équations différentielles fourni par le modèle bidimensionnel. Comme alternative, nous avons développé une approche basée sur la méthode *Level-Set*, qui demandait au préalable de fournir un modèle pour la vitesse de propagation du front en tout point. Pour obtenir cette information, nous avons étudié le cas d'un front plat de longueur infinie dans le contexte du modèle de Margerit. Nous avons mis au point un algorithme de calcul pour cette vitesse et nous avons examiné la stabilité dynamique du profil stationnaire calculé. Les données manquantes sont choisies par une approche statistique pour que les comportements qualitatifs des divers facteurs (vent et pente) coïncident au mieux avec les prédictions provenant du modèle de Rothermel dans le domaine de validité de ce dernier.

Quand on teste le modèle ainsi calibré en dehors de la plage de calibration, l'accord est moins bon, ce qui suscite plusieurs questions. Une question est de savoir si la forme du modèle et son domaine d'application correspondent à ce qui serait requis pour des simulations réalistes utiles à l'industrie. Le modèle nécessite beaucoup de données, dont certaines qui ne sont pas couramment disponibles. On a vu qu'entre autres la charge d'extinction  $P_{ext}$  et la hauteur de la flamme  $h_f$  sont deux paramètres qui sont difficiles à quantifier. Pour trouver des valeurs cohérentes de ces données, nous avons supposé que le modèle de Margerit coïncidait avec celui de Rothermel dans les conditions où ce dernier est valide. Il est risqué d'extrapoler pour des valeurs sortant du domaine de validité de Rothermel comme nous l'avons fait avec les simulations de la base de données. De plus, une des grandes failles du modèle de Rothermel n'a pas pu être résolue. Le modèle de Margerit lui aussi n'est valide seulement que pour de petits vents et de petites inclinaisons.

Cependant, il ne faut pas croire que le modèle est complètement à rejeter. Les idées de base semblent être en mesure de produire de bons résultats. Les problèmes rencontrés sont représentatifs de ce qui se passe lorsqu'on cherche à fermer un modèle multi-échelle avec des approches plus ou moins ad hoc. Des alternatives ont été proposées récemment, y compris des approches où des simulations micro-locales et ponctuelles sont couplées avec la simulation aux grandes échelles comme substitut aux approches empiriques de fermeture.

En conclusion, le modèle multiéchelle de Margerit possède de très bonnes idées de départ. Nos tests de mise en oeuvre pratique révèlent certaines limitations, quand on compare les résultats avec ceux d'un modèle établi. Ce serait intéressant de le revoir avec une approche différente pour la fermeture. Ceci pourrait être très utile si on veut simuler des feux de grandes intensités, qui nécessiteraient un couplage avec les conditions atmosphériques. Ce type de simulation n'est pas compatible avec la version actuelle du modèle de Margerit.



# BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] **Johnson, E. A.**, "Fire and Vegetation Dynamics," *Cambridge Studies in Ecology*, ( Cambridge University Press, 1995), 129 pages.
- [2] **Saito, K.**, "Flames," *Forest Fires*, Johnson, E.A. et Miyanisi, K, (Academic Press, 2001), Chapitre 2.
- [3] **Weber, R.O.**, "Wildland Fire Spread Models," *Forest Fires*, Johnson, E.A. et Miyanisi, K, (Academic Press, 2001), Chapitre 5.
- [4] **Fendell, F.E. et Wolff, M.F.** "Wind-Aided Fire Spread," *Forest Fires*, Johnson, E.A. et Miyanisi, K, (Academic Press, 2001), Chapitre 6.
- [5] **Rothermel, R. C.** (1972) "A mathematical model for predicting fire spread in wildland fuels. Research Paper INT-115. Ogden, UT : US Department of Agriculture, Forest Service, Intermountain Forest and Range Experiment Station, pp. 1-40.
- [6] **Wilson R.A., Jr.**, "A reexamination of fire spread in free-burning porous fuel beds", *USDA Forest Service*, 1982, Research paper INT-289, Ogden, Utha, USA, 28 pages.
- [7] **Finney, M.A.**, "FARSITE : Fire Area Simulator-Model Development and Evaluation", *USDA Forest Service*, 1998, Research paper RMRS-RP-4, 47 pages.
- [8] **Sethian, J. A.** "Level Set Methods and Fast Marching Methods," *Cambridge Monographs on applied and computational mathematics*, ( Cambridge University Press, 1999), 378 pages.
- [9] **Osher, S. and Fedkiw, R.** "Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces," *Springer*, 2003, 273 pages.

- [10] Margerit, J. (1998) "*Modélisation et simulations numériques de la propagation de feux de forêts*", Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, 229 pages.
- [11] Margerit, J et Séro-Guillaume, O. (2002) "*Modelling forest fire. Part I : a complete set of equations derived by extended irreversible thermodynamics*", International Journal of Heat and Transfer, pages 1705-1722.
- [12] Margerit, J et Séro-Guillaume, O. (2002) "*Modelling forest fire. Part II : reduction to two-dimensional models and simulation of propagation*", International Journal of Heat and Transfer, pages 1723-1737.
- [13] Schwartz, L. (1965) "*Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*", Hermann, Paris.
- [14] [www.sopfeu.qc.ca](http://www.sopfeu.qc.ca)
- [15] [http://research.esd.ornl.gov/hnw/embyr/Simulating\\_fire\\_patterns\\_in\\_hete.pdf](http://research.esd.ornl.gov/hnw/embyr/Simulating_fire_patterns_in_hete.pdf)
- [16] <http://www.csu.edu.au/special/bushfire99/papers/catchpole/>
- [17] <http://spe.univ-corse.fr/simffweb/francesu/debut.htm>
- [18] <http://fire.org/>
- [19] <http://research.esd.ornl.gov/EMBYR/fire.mpg>
- [20] <http://63.102.134.24/behaveplus/download/rothermel72.pdf>.
- [21] [http://www.fs.fed.us/rm/pubs/rmrs\\_rp04.pdf](http://www.fs.fed.us/rm/pubs/rmrs_rp04.pdf)
- [22] <http://gis.esri.com/library/userconf/proc95/to100/p092.html>.
- [23] <http://www.scd.ucar.edu/info/SC96/FIRE/FireExhibit.html>
- [24] <http://www.met.utah.edu/skrueger/homepages/rsun/neutral.html>
- [25] <http://box.mmm.ucar.edu/research/wildfire/afm/simulations.html>
- [26] <http://www.vets.ucar.edu/vg/models/clark.shtml>
- [27] [http://biosystems.okstate.edu/darcy/index\\_fr.htm](http://biosystems.okstate.edu/darcy/index_fr.htm)
- [28] [http://en.wikipedia.org/wiki/Darcy's\\_law](http://en.wikipedia.org/wiki/Darcy's_law)

# Annexe A

---

## ÉQUATIONS DU MODÈLE DE ROTHERMEL

### A.1. DONNÉES PHYSIQUES

- $w_0$  : compacité du combustible sec ( $kg/m^2$ )
- $\delta$  : hauteur du combustible ( $m$ )
- $\sigma$  : rapport aire/volume d'une particule de combustible ( $cm^{-1}$ )
- $h$  : chaleur contenue dans une particule de combustible ( $kJ/kg$ )
- $\rho_p$  : densité de masse sèche d'une particule ( $kg/m^3$ )
- $M_f$  : humidité des particules de combustible (masse humide/ masse sèche)
- $S_T$  : masse de minéraux dans le combustible/masse sèche
- $S_e$  : masse de silice/masse sèche
- $U$  : vitesse du vent à mi-flamme ( $m/min$ )
- $\tan \phi$  : pente, accroissement vertical/distance horizontale
- $M_x$  : humidité d'extinction

### A.2. ÉQUATIONS

Voici les équations permettant de trouver la vitesse de propagation.

Vitesse du front

$$F = \frac{I_R \xi (1 + \phi_W + \phi_S)}{\rho_b \varepsilon Q_{ig}} \quad (A.2.1)$$

Masse volumique

$$\rho_b = w_0 / \delta \quad (A.2.2)$$

Compacité

$$\beta = \rho_b / \rho_p \quad (\text{A.2.3})$$

Taux de réaction maximale

$$\Gamma_{max} = (0.0591 + 2.926\sigma^{-1.5})^{-1} \quad (\text{A.2.4})$$

Capacité optimale

$$\beta_{op} = 0.204\sigma^{-0.8189} \quad (\text{A.2.5})$$

Taux de réaction optimale

$$\Gamma = \Gamma_{pmax} (\beta / \beta_{op})^A e^{A(1-\beta/\beta_{op})} \quad (\text{A.2.6})$$

$$A = (6.723\sigma^{0.1} - 7.27) \quad (\text{A.2.7})$$

Coefficient d'humectage humide

$$\eta_M = 1 - 2.59 \frac{M_f}{M_x} + 5.11 \left( \frac{M_f}{M_x} \right)^2 - 3.52 \left( \frac{M_f}{M_x} \right)^3 \quad (\text{A.2.8})$$

Coefficient d'humectage minéral

$$\eta_S = 0.174 S_e^{-0.19} \quad (\text{A.2.9})$$

Masse volumique nette

$$w_n = \frac{w_0}{1 - S_T} \quad (\text{A.2.10})$$

Intensité de réaction

$$I_R = \Gamma w_n h \eta_M \eta_S \quad (\text{A.2.11})$$

Pourcentage du flux servant pour le préchauffage

$$\xi = (192 + 7.9095\sigma)^{-1} e^{(0.792 + 3.760\sigma^{0.5})(\beta + 0.1)} \quad (\text{A.2.12})$$

$$C = 7.47 e^{-0.8711\sigma^{0.55}} \quad (\text{A.2.13})$$

$$B = 0.1599\sigma^{0.54} \quad (\text{A.2.14})$$

$$E = 0.715 e^{-0.01094\sigma} \quad (\text{A.2.15})$$

Facteur vent

$$\phi_W = C(0.305U)^B \left( \frac{\beta}{\beta_{op}} \right)^{-E} \quad (\text{A.2.16})$$

Facteur pente

$$\phi_S = 5.275\beta^{-0.3}(\tan \phi)^2 \quad (\text{A.2.17})$$

Coefficient de chauffage effectif

$$\varepsilon = e^{-4.528/\sigma} \quad (\text{A.2.18})$$

Chaleur de préchauffage

$$Q_{ig} = 581 + 2594M_f \quad (\text{A.2.19})$$

## Annexe B

---

### PARAMÈTRES DU MODÈLE DE MARGERIT

Cette annexe présente les différentes variables utilisées par le modèle bidimensionnel de Margerit.

#### Grandeurs modélisées pour décrire le front

$T(\mathbf{M}, t)$ : Température au point  $\mathbf{M}$  au temps  $t$  (K),

$H(\mathbf{M}, t)$ : Humidité au point  $\mathbf{M}$  au temps  $t$  (%),

$P(\mathbf{M}, t)$ : Charge au point  $\mathbf{M}$  au temps  $t$  ( $kg/m^2$ ).

Notez que l'on ne indique pas la dépendance en  $\mathbf{M}$  et en  $t$  pour alléger le texte.

#### Paramètres caractérisant la végétation

$P_{ini}$ : Charge de végétation initiale ( $kg/m^2$ ),

$P_{ext}$ : Charge d'extinction ( $kg/m^2$ ),

$H_{ini}$ : Humidité initiale (sans dimension),

$\delta$ : Hauteur de la végétation en  $m$ ,

$h_f$ : Hauteur de la flamme ( $m$ ),

$K$ : Coefficient d'extinction ( $m^{-1}$ ),

$T_a$ : Température ambiante (K),

$T_{inf}$ : Température d'inflammation du combustible (K),

$T_f$ : Température de la flamme (K),

$\bar{h}$ : Coefficient de perte convective (on supposera égale à 0) (sans dimension),

#### Différentes constantes utiles

$T_{ev} = 373K$ : Température d'évaporation de l'eau,

$L_{ev} = 2.25 \times 10^6 J/kg$ : Chaleur latente d'évaporation de l'eau,

$B = 5.67 \times 10^{-8} W/m^2 \cdot K^4$ : constante de Boltzman,

$C_s = 2400 J/kg \cdot K$ : capacité calorifique du bois,

$C_w = 4180 J/kg \cdot K$ : capacité calorifique de l'eau,

$g = 9.81 m/s^2$ : accélération gravitationnelle.

Les constantes dans le calcul de  $v_r$

$A_s = 5 \times 10^3 s^{-1}$ ,

$E_s = 1.398 \times 10^5 J/mole$ ,

$R = 8.314 J/mole \cdot K$ .

Les paramètres décrivant le vent et la pente entrant dans le calcul de  $\mathcal{M}_r(\mathbf{M})$ .

$\vec{n}$ : Vecteur normal unitaire à la surface,

$\vec{k}$ : Vecteur unitaire allant dans la direction de la pente maximale,

$\vec{k}^\perp$ : Vecteur normal à  $\vec{n}$  et à  $\vec{k}$ ,

$V$ : Vitesse du vent en  $m/s$ .

## Annexe C

---

### ERREURS COMMISES LORS DU CHOIX DU MODÈLE POUR LA HAUTEUR DE LA FLAMME

Dans cette annexe, nous présentons la méthode et les résultats qui nous ont menés à l'expression :

$$\tilde{h}_f = (0.066 + 0.0402\delta - 0.002P_{ini}) P_{ini}. \quad (\text{C.0.20})$$

#### C.1. ANALYSE DU PREMIER MODÈLE

Analysons ici le premier modèle fourni par l'équation

$$\tilde{h}_f = -0.2 + 1.737\delta - 6.765\delta^2 + 0.122P_{ini}. \quad (\text{C.1.1})$$

Comme nous le savons, ce modèle est rejeté afin de trouver un modèle plus réaliste. Par contre, son étude nous a permis d'en apprendre sur la relation entre  $h_f$  et les autres paramètres. Les résultats décrits dans le chapitre 6 nous informent que  $h_f$  dépend seulement de  $P_{ini}$  et de  $\delta$ , mais ils ne permettent pas de conclure sur la dépendance de  $h_f$  à  $P_{ext}$  via  $\alpha$  puisque  $\sigma$  et  $\rho_p$  n'influencent pas  $h_f$ .

Regardons les graphiques de l'erreur relative commise par les prédictions du modèle par rapport aux valeurs de  $h_f$  trouvées à l'aide de l'équation  $f(h_f) = v_M(h_f) - v_R$  utilisée dans le chapitre 6. L'erreur relative est montrée en fonction des différents paramètres qui apparaissent dans la table 6.2.1, c'est-à-dire  $\sigma$ ,  $\rho_p$ ,  $\delta$ ,  $P_{ini}$  et  $H$ . Puisque pour un paramètre fixe, il y a plusieurs valeur de l'erreur relative selon les autres paramètres, nous montrons le maximum de cette erreur



relative ainsi que sa moyenne. Nous faisons de même pour l'erreur absolue. Nous effectuons cette analyse pour les trois valeurs de  $\alpha$  afin de vérifier son impact.

### Erreur relative

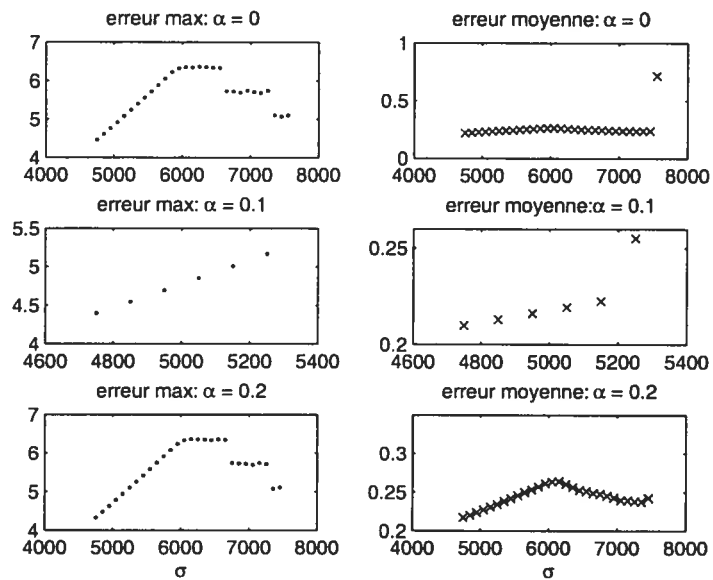


FIG. C.1.1. Erreur relative de prédiction de  $h_f$  en fonction de  $\sigma$  pour le modèle 1.

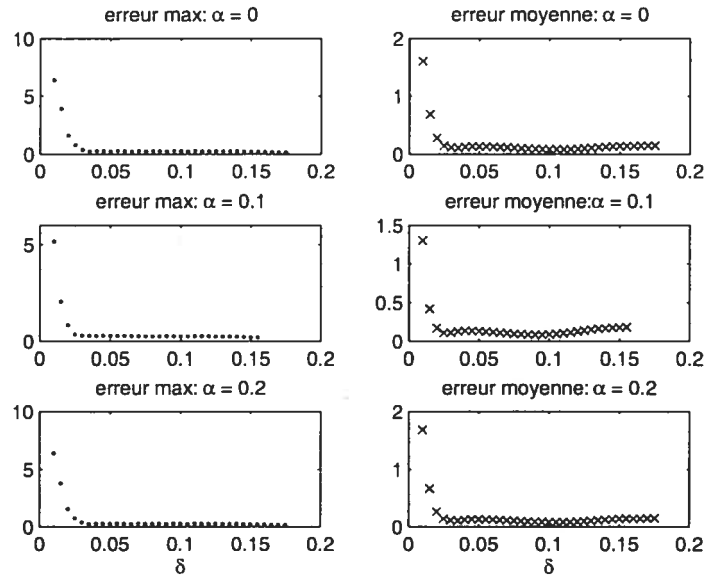


FIG. C.1.2. Erreur relative de prédiction de  $h_f$  en fonction de  $\delta$  pour le modèle 1.

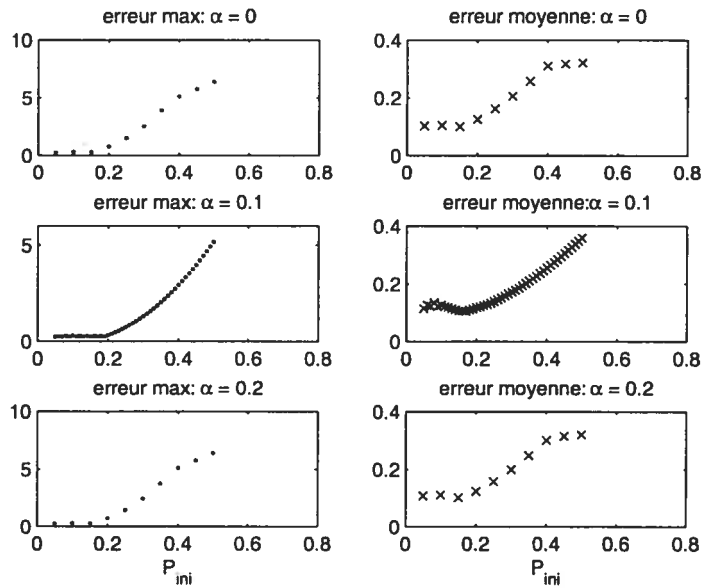


FIG. C.1.3. Erreur relative de prédiction de  $h_f$  en fonction de  $P_{ini}$  pour le modèle 1.

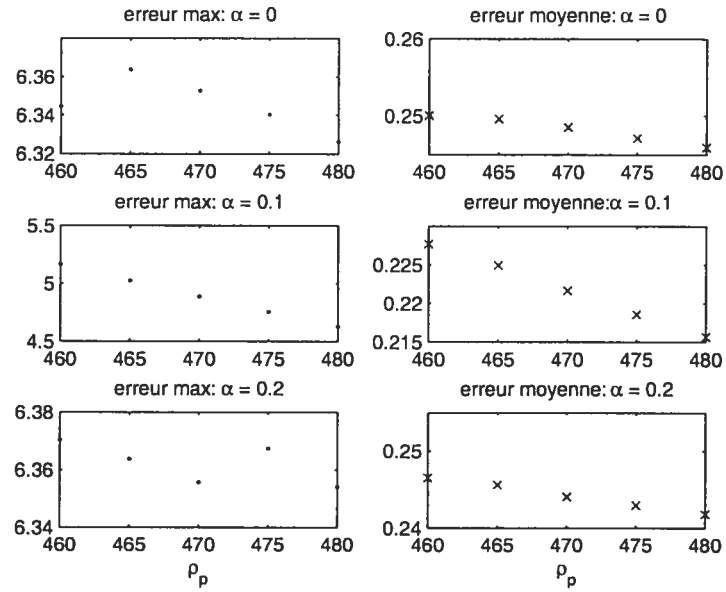


FIG. C.1.4. Erreur relative de prédiction de  $h_f$  en fonction de  $\rho_p$  pour le modèle 1.

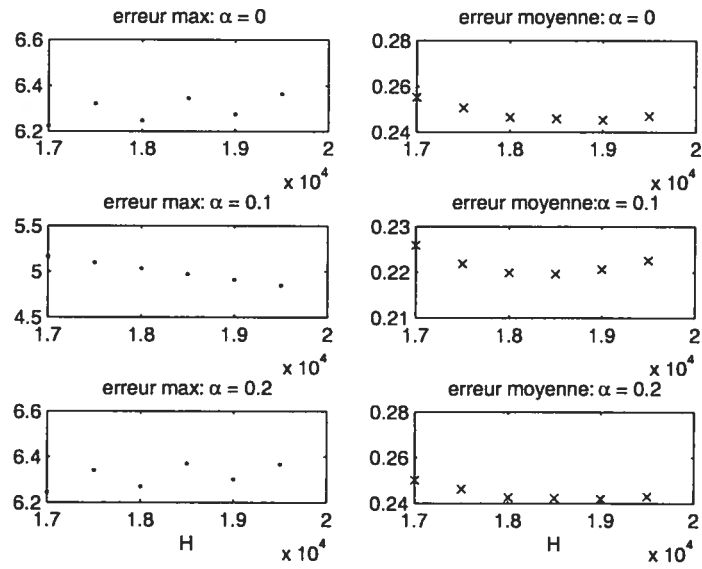


FIG. C.1.5. Erreur relative de prédiction de  $h_f$  en fonction de  $H$  pour le modèle 1.

### Erreur absolue

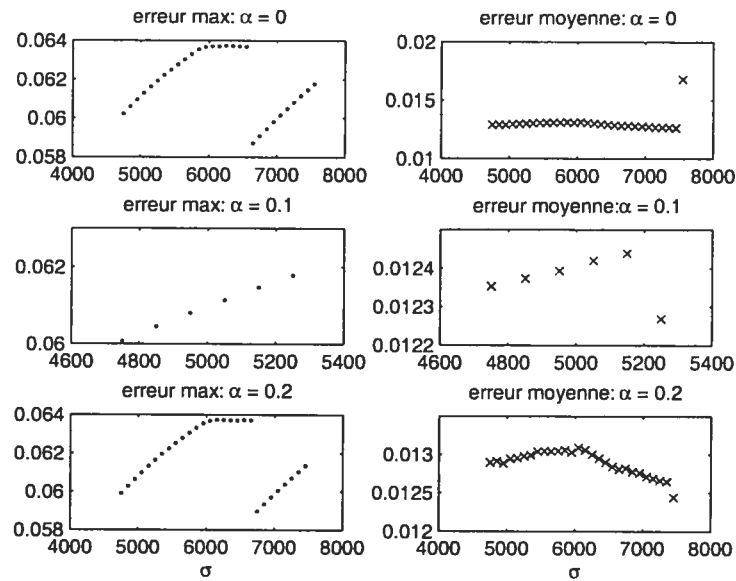


FIG. C.1.6. Erreur absolue de prédiction de  $h_f$  en fonction de  $\sigma$  pour le modèle 1.

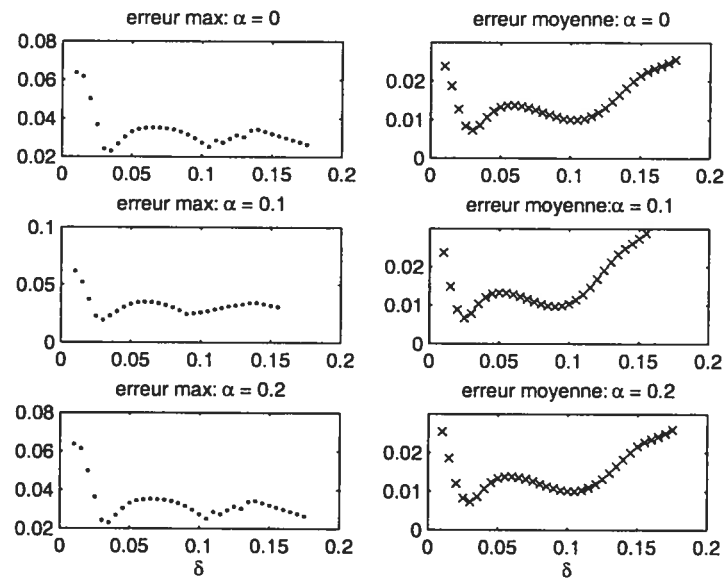


FIG. C.1.7. Erreur absolue de prédiction de  $h_f$  en fonction de  $\delta$  pour le modèle 1.

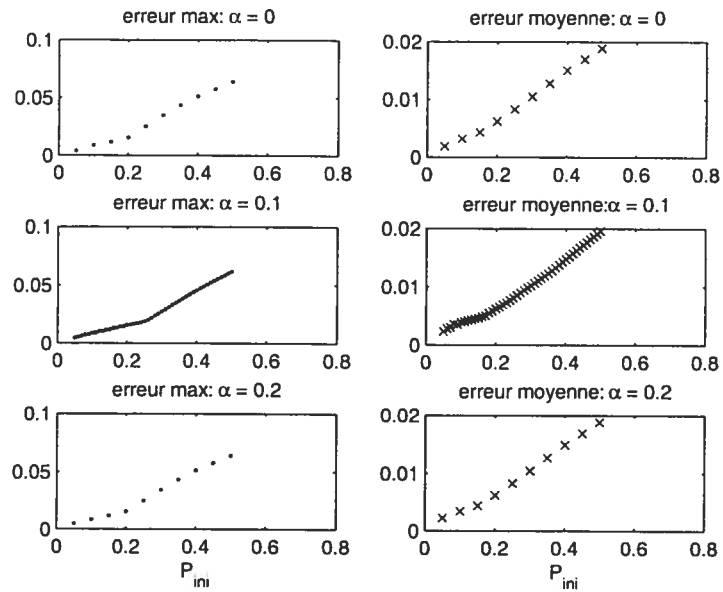


FIG. C.1.8. Erreur absolue de prédiction de  $h_f$  en fonction de  $P_{ini}$  pour le modèle 1.

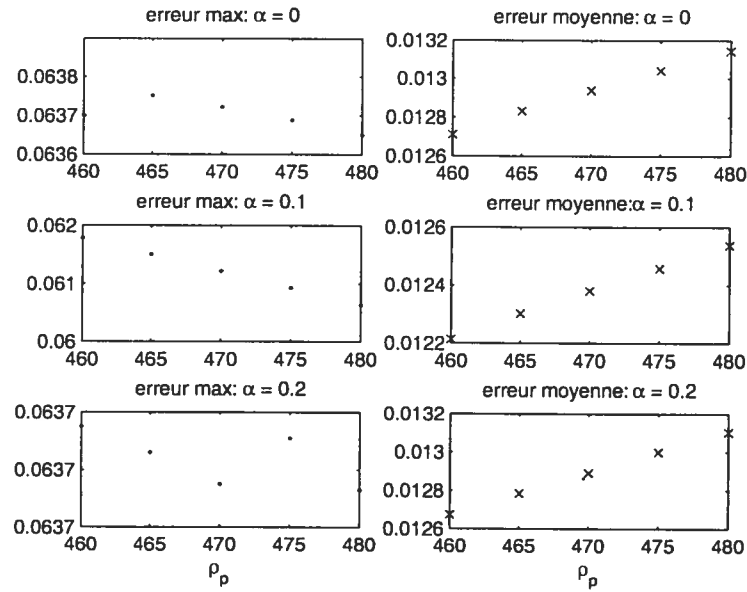


FIG. C.1.9. Erreur absolue de prédiction de  $h_f$  en fonction de  $\rho_p$  pour le modèle 1.

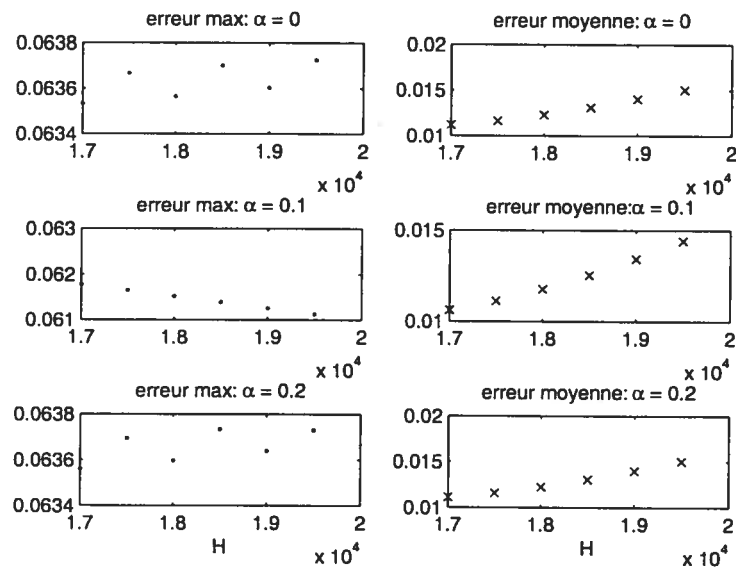


FIG. C.1.10. Erreur absolue de prédiction de  $h_f$  en fonction de  $H$  pour le modèle 1.

Dans chacun des cas, on remarque que le maximum de l'erreur relative est assez élevé allant parfois jusqu'à 700%. Il s'agit cependant de cas extrêmes où la véritable valeur de  $h_f$  est très petite. L'erreur relative moyenne ainsi que l'erreur

absolue montrent mieux ce qui se passe. Ce qui est intéressant de constater est que l'erreur commise pour un  $\alpha$  fixé est sensiblement la même que pour les autres valeurs. Ainsi, nous étudions seulement le cas  $\alpha = 0$ , ce qui correspond à un cas où il y a une combustion complète. Par contre, il ne s'agit pas d'un modèle qui correspond à la réalité pour de petites charges de végétation.

## C.2. MODÈLE FOURNI PAR L'ÉQUATION 6.2.10

Afin de rendre le modèle plus réaliste, nous avons changé la forme de  $h_f$  pour la forme

$$h_f = \left( a_{0,0} + \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^m a_{i,j} x_i^j \right) P_{ini}.$$

Nous avons refait un choix de modèle par la méthode pas à pas et  $h_f$  a gardé sa dépendance envers  $P_{ini}$  et  $\delta$ . Par contre, le modèle reste valide seulement pour de petites charges ne dépassant pas  $1\text{kg}/\text{m}^2$ . Le jeu de données que nous possédons a des charges vraiment supérieures. C'est pour cette raison que nous créons une nouvelle base de données pour trouver  $h_f$  en fonction de  $P_{ini}$  et de  $\delta$ , car nous savons que les autres paramètres n'influencent pas  $h_f$ . Il en suit que le modèle trouvé est

$$\tilde{h}_f = (0.066 + 0.0402\delta - 0.002P_{ini}) P_{ini}. \quad (\text{C.2.1})$$

Ce modèle a un coefficient de corrélation  $R^2 = 0.8382$ ; ce qui est très acceptable. C'est le modèle que nous utiliserons pour les simulations.